Rapport sur l'épreuve de Mathématiques 2

Le problème portait sur les matrices symétriques positives et les matrices symétriques définies positives. Afin de couvrir une large partie du programme, il comprenait quatre parties orientées dans des directions différentes. De nombreuses questions étaient des questions de cours, ou s'en déduisaient simplement ; elles étaient destinées à vérifier les connaissances de base des étudiants.
La première partie proposait des questions élémentaires ; la seconde était plus délicate mais les questions étaient classiques, permettant de détecter les candidats sérieux ; la troisième partie demandait une analyse plus poussée et a permis de récompenser les étudiants capables de construire un raisonnement élaboré ; enfin, la quatrième était plus technique et faisait appel à plusieurs points de cours ou à leur démonstration.
Les meilleurs candidats abordent le sujet dans sa quasi-totalité, comprenant l'esprit du problème et ne laissant de côté que quelques points techniques de certaines questions. A l'opposé, dans les copies les moins bonnes, on ne peut accorder que quelques points sur les questions les plus faciles.

La présentation des copies est globalement satisfaisante. Beaucoup d'élèves font un effort dans ce sens. Néanmoins, les résultats ne sont pas toujours mis en évidence, principalement les résultats faciles à obtenir : faire ressortir les résultats est essentiel !
Pour une bonne lisibilité des copies, les étudiants doivent éviter un excès de râtures et une utilisation abusive du blanc correcteur.

Les résultats liés à la théorie spectrale et les théorèmes qui s'y rapportent semblent connus des candidats et correctement maîtrisés. En revanche, on remarque une confusion fréquente entre endomorphisme orthogonal et endomorphisme autoadjoint.
On lit trop de manipulations hasardeuses sur les opérations matricielles, comme
$A^2 = B^2 \Rightarrow A = B$ ou bien, Y étant une matrice colonne, $NY = \mu Y \Rightarrow N^2Y^2 = \mu^2Y^2$!
Lorsque l'énoncé propose de travailler sur un endomorphisme, certains candidats préfèrent travailler sur une matrice représentative ; mais alors, il faut l'introduire en précisant la base de référence. La même remarque vaut lorsque l'énoncé propose de travailler sur une matrice et que le candidat préfère travailler sur un endomorphisme.
Enfin tout le problème portait sur des matrices symétriques vérifiant une propriété supplémentaire, un oubli très fréquent est la justification de la symétrie de la matrice, tant pour l'exemple numérique de la fin de la partie II que pour les questions théoriques.

La première partie portait sur une propriété de compacité d'un ensemble de vecteurs, liée au signe des valeurs propres d'un endomorphisme autoadjoint.

Dans la première question, on traitait deux exemples en dimension 2. Le calcul du produit scalaire $(x|s(x))$ doit être justifié, au moins au début du problème, par la décomposition des vecteurs dans la base orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$.
Pour montrer que le premier ensemble σ est une ellipse, il ne suffit pas d'affirmer que les valeurs propres de la matrice S sont non nulles et de même signe, il faut aussi justifier qu'il n'est pas vide.

Dans le deuxième exemple, on ne demandait pas les sous-espaces propres, reconnaître que $\big(x|s(x)\big)$ est un carré donnait les deux droites de l'ensemble σ.
Pour répondre à l'énoncé, il fallait tracer l'ellipse (et les deux droites) dans le repère $\mathcal{R}$ plutôt que dans le repère propre.
Dans la deuxième question, on démontrait la propriété centrale de cette partie.
On pouvait justifier la continuité de l'application $x \mapsto \big(x|s(x)\big)$ en reconnaissant une application polynomiale ou par la composition d'applications continues, mais cette application n'est pas linéaire.
On rencontre souvent des énoncés fantaisistes concernant l'image directe/réciproque d'un fermé/compact par une application continue.
La dernière partie de la question, portant sur le vecteur x_r, est traitée, au moins partiellement, par beaucoup de candidats. Signalons, dans cette question, qu'il est préférable d'utiliser la notation $\|x\|^2$ plutôt que x^2 pour le carré scalaire d'un vecteur.
Enfin, la limite de $\|x_r\|^2$ doit être justifiée par les inégalités de l'hypothèse : $\lambda_1 \leq 0$ et $\lambda_n > 0$.

La deuxième partie portait sur l'existence et l'unicité de la racine carrée d'une matrice symétrique positive.
Un peu d'attention sur la rédaction permettait d'obtenir tous les points des questions traitées. Trop peu d'étudiants ont remarqué l'importance des bases :
- $(X_1, \dots, X_n)$ base orthonormale dans la première question ;
- dans la deuxième question, les étudiants obtiennent l'égalité matricielle $NY = \Delta Y$ et en déduisent $N = \Delta$; mais il faut encore remarquer que, puisque Y est un vecteur propre donné de la matrice symétrique N, on peut faire décrire à Y une base de vecteurs propres et donc, puisque N et Δ coïncident sur cette base, elles sont égales.
Le caractère symétrique que doit vérifier une matrice pour appartenir à S_n^+ (condition nécessaire), n'est presque jamais vérifié, il est pourtant facile à justifier. Souvent les étudiants se contentent de vérifier que les valeurs propres qu'ils ont obtenues sont positives, sans s'assurer qu'ils les ont toutes.
Le cas particulier $y_i = 0$ n'est jamais considéré, il est immédiat. Signalons des candidats qui font de bons raisonnements et montrent l'unicité de la racine carrée en utilisant les résultats obtenus précédemment.
Dans la troisième question, on constate une difficulté avec les polynômes d'endomorphisme. Peu de candidats ont vu dans cette question une application de la question précédente, mais ceux qui la remarquent vont jusqu'au bout.

La troisième partie portait sur une propriété de la trace.
Dans la première question, pour montrer l'inégalité $\sum \alpha_i \nu_{i,i} \leq \sum \alpha_i$, on lit souvent l'inégalité $\nu_{i,i} \leq 1$, déduite de l'orthogonalité de la matrice V, mais il manque presque systématiquement la justification $\alpha_i \geq 0$ de l'hypothèse pour conclure.

Dans le lemme technique, la condition nécessaire $\sin\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\cos\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ est obtenue, mais la condition suffisante, que la somme des carrés soit égale à 1, est rarement vérifiée. Le cas particulier $a = b = 0$ est très rarement considéré.
La question III.2.2, lorsqu'elle est abordée, est globalement bien traitée. Le changement de base pour le calcul de la trace dans la dernière question est mal ou pas expliqué.

La quatrième partie portait sur des inégalités : l'inégalité (1) qui résultait de l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité de Kantorowitch (2), pour laquelle on lit parfois une démonstration originale.
On montrait dans la dernière question que l'inégalité (2) était optimale. On pouvait aboutir à ce résultat en conservant le produit scalaire $(v_1|v_n)$; mais ce calcul était bien plus simple si on remarquait que ce produit scalaire était nul, puisque v_1 et v_n étaient des vecteurs propres d'un endomorphisme autoadjoint, associés à des valeurs propres différentes. Bien peu d'étudiants l'ont vu.

Pour conclure ce rapport, l'équipe des concepteurs et des correcteurs encourage les candidats à poursuivre leur effort dans l'amélioration de la présentation et de la rédaction. Elle leur conseille une lecture attentive de l'énoncé car il contient des indications essentielles, et elle leur recommande de donner tous les arguments qui justifient les démonstrations. Ces arguments sont indispensables aux correcteurs pour évaluer les connaissances et juger la qualité des raisonnements des étudiants, et donc pour leur attribuer le maximum de points sur les questions traitées.

Christian Dupuis