Rapport sur l'épreuve de Mathématiques 1

Le sujet proposait deux parties indépendantes, la première ayant pour but de calculer des sommes de séries, la deuxième de déterminer des limites de fonctions définies par des intégrales.
Les deux parties apparaissaient, au moins partiellement, comme des applications du lemme de Riemann-Lebesgue. Ce lemme n'étant pas au programme, les candidats n'avaient nullement à connaître ce résultat, que l'on obtenait sans difficulté pour une fonction intégrable et de classe C^1.
L'épreuve couvrait une large part du programme, elle permettait de se faire une idée sur le niveau d'assimilation de nombreuses notions d'analyse, ainsi que sur l'aisance technique des candidats pour leur mise en œuvre.
Si les théorèmes importants semblent assez bien connus, tous les correcteurs ont constaté d'énormes faiblesses lors de l'utilisation des inégalités et des nombres complexes : environ un quart des candidats considère une relation d'ordre dans $\mathbb{C}$!!

Partie I

I.1 Étude de la fonction L.

Il s'agissait d'abord d'étudier la série $\sum_{k\geq 1}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}$ et sa somme $L(x)$. Le rayon, le domaine de convergence et la somme ont été bien étudiés. Par contre beaucoup de candidats n'ont pas compris qu'on leur demandait de redémontrer l'égalité $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2$. Ceux qui l'ont compris, ont bien utilisé le théorème de continuité pour les séries de fonctions, mais ils ont rarement su montrer correctement la convergence uniforme de la série de fonctions sur l'intervalle $[0,1]$ (beaucoup se contentent de la convergence uniforme sur tout segment de l'intervalle $[0,1[$).

I.2 Étude de la série $\sum \frac{1}{k}\cos(\frac{2k\pi}{3})$.

La première égalité (dans I.2.1) a souvent été admise ou a été traitée de façon incorrecte, la deuxième égalité (plus facile) ayant beaucoup plus de succès. Assez peu de candidats ont pensé aux sommes de Riemann pour obtenir la limite de $\sum_{k=1}^{3p} a_k$ (mais certains ont correctement obtenu cette limite grâce à une comparaison avec une intégrale) : encore plus rares sont ceux qui ont vu que la convergence de $\sum_{k=1}^{3p} a_k$ ne suffisait pas pour affirmer que la série $\sum_{k\geq 1} a_k$ convergeait.

I.3 Étude des séries $\sum \frac{\cos(k\alpha)}{k}$ et $\sum \frac{\sin(k\alpha)}{k}$.

Ces questions semblaient beaucoup plus accessibles, mais elles n'ont pas toujours été traitées avec suffisament de rigueur ; par exemple, l'argument $e^{it} \neq 1$ (pour $t \in]0, 2\pi[$) essentiel pour I.3.1 et I.3.2 a souvent été oublié ; de même dans I.3.3 après une intégration par parties (avec quelques erreurs) le candidat se contente de mettre en facteur $\frac{1}{n+1}$ et d'affirmer (sans justification) que les autres termes sont bornés ou bien il conclut à partir du produit de $\frac{1}{n+1}$ par l'intégrale d'une fonction dans laquelle n figure encore.

Dans I.3.4, la justification de la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\alpha}}{k}$ est obtenue assez souvent à l'aide d'arguments singuliers comme : $e^{it} < 1$ ou $|e^{it}| < 1$; $\lim_{n \to +\infty} (e^{it})^n = 0$; $t \in [\pi, \alpha] \Rightarrow e^{it} \leq e^{i\alpha}$.

Partie II

II.1 Existence de $\tilde{f}_g(x)$.

Trop de candidats justifient l'existence de l'intégrale impropre par l'inégalité $\left| \int_0^{+\infty} f(t) e^{ixt} dt \right| \leq M \int_0^{+\infty} |f(t)| dt$. En revanche la continuité de $\tilde{f}_g$ est assez souvent obtenue correctement.

II.2 Limite de $\tilde{f}_g(x)$ lorsque $g(t) = e^{it}$.

Le fait que le reste d'une intégrale convergente tende vers 0 ne semble pas du tout évident. On lit souvent l'argument : puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)| dt$ converge, on a $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$ donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists A$ tel que $\int_A^{+\infty} |f(t)| dt < \varepsilon$.

Dans II.2.2 on retrouve les mêmes difficultés techniques pour les candidats que dans la partie I, lorsqu'il s'agit de majorer des modules de nombres complexes.

II.3 Étude pour une fonction particulière.

Cette partie plus classique a été plutôt bien traitée. Il faut simplement noter l'absence d'argument pour justifier l'égalité $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u}{x}} |\sin u| du = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} e^{-\frac{u}{x}} |\sin u| du$.

II.4 Étude générale.

La question II.4.1 est assez largement abordée : l'existence et la continuité de la fonction h sont obtenues et l'idée de développement de Fourier arrive assez souvent, les calculs n'étant pas toujours exacts, sans que cela ait de conséquence puisque le résultat était donné.
La suite n'était l'affaire que des meilleurs candidats, mis à part le changement de variable de la question II.4.3.1 effectué par presque tous.

Il faut féliciter les excellents candidats qui ont su justifier la permutation série et limite dans II.4.2 avant d'aborder avec quelques succès le cas d'une fonction continue par morceaux.

Signalons enfin que les correcteurs ont apprécié le fait que la plupart des candidats aient fait un effort pour rendre leur copie agréable à lire.

François Gauthier