C, tandis que les deux parties suivantes faisaient étudier des équations différentielles dont les graphes des solutions, exprimés dans différents systèmes de coordonnées, dessinaient la lettre C.

Analyse globale des résultats

Il y a eu dans ce problème assez peu de groupes de questions systématiquements délaissées par les candidats, ce qui suggère que l'énoncé proposé était d'une longueur appropriée. En revanche, les réponses à certaines questions montrent sans ambiguïté qu'une majorité de candidats méconnaît des pans entiers du programme. C'est le cas des question IE1-5 portant sur le calcul différentiel à plusieurs variables, ou encore des questions IC relatives au théorème de Cauchy-Lipschitz, ainsi que de la question de topologie IIIA2.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Quelques remarques spécifiques sur les erreurs les plus fréquentes, dont les futurs candidats sont invités à tenir compte :

- dans la question IA, les candidats affirment qu'une famille est une base le plus souvent sans en donner ne serait-ce qu'un début de preuve ;
- les candidats doivent se laisser guider par l'énoncé ! Plusieurs d'entre eux se sont lancés dans des calculs de polynômes caractéristiques pour répondre au IC-D, ce qui n'est pas l'esprit du problème ;
- les réponses aux questions IE montrent que plus de 90 % des candidats n'ont pas compris la notion de matrice jacobienne ;
- dans les questions IIC, le théorème de Cauchy-Lipschitz n'est presque jamais énoncé de façon correcte (moins de 20 % des copies) ;
- la notion de solution maximale d'une équation différentielle (question IIB3 et IIC3-4) n'est pas bien comprise ;
- dans les questions IID, trop de candidats justifient que la solution m est développable en série entière par le fait qu'elle est indéfiniment différentiable ;
- la question de topologie IIIA2 a donné lieu à de trop nombreuses confusions : pour vérifier qu'une partie est fermée, il ne suffit pas de dire qu'elle n'est pas ouverte ; l'image d'un fermé par une application continue n'est pas fermée en général, contrairement à ce qu'affirment certains candidats ; enfin, il y a eu de nombreuses confusions quant à la convexité (une courbe plane est rarement une partie convexe...) ;
- les tracés de courbes sont souvent peu soignés : rappelons qu'il faut préciser un vecteur unitaire pour chaque axe, et qu'il faut placer quelques points remarquables et les tangentes à la courbe en ces points ;
- dans les question IIID, l'énoncé de la formule de Green-Riemann est souvent très approximatif ; il aurait fallu préciser par exemple que la 1-forme considérée est de classe C1 ;
- les réponses à la question IID3 sont souvent peu convaincantes ; trop de candidats donnent le résultat (à savoir 1) sans la moindre justification. Quelques calculs intermédiaires sont nécessaires pour qu'une telle réponse puisse être prise en compte.

Conclusion

Les correcteurs considèrent que la rédaction de la plupart des copies laisse beaucoup à désirer. Les futurs candidats doivent absolument faire des efforts particuliers en ce sens, et apprendre à rédiger de manière à la fois concise et précise. En effet, un raisonnement obscur, où certains arguments sont omis, mal compris ou même seulement imprécis, est toujours dévalorisé de façon significative par la notation. En outre, une rédaction claire des questions ou étapes intermédiaires d'un raisonnement aide les candidats eux-mêmes à mieux en comprendre le déroulement. Les correcteurs encouragent donc les élèves de classes préparatoires à progresser dans cette direction.

Mathématiques II

Présentation du sujet

Le sujet avait pour but d'évaluer la dimension maximale d_n des sous-espaces vectoriels V de l'ensemble $Sim(E)$ formé des similitudes sur un espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$.

La première partie permettait de démontrer que $\dim(V) \leq n$ et que V admet une base, orthogonale pour $(f,g) = tr\,(f^* g)$, constituée de l'identité et d'une famille $(f_1, \ldots, f_{d-1})$ d'automorphismes orthogonaux antisymétriques vérifiant, pour $i \neq j$, $f_i f_j + f_j f_i = 0$.

Dans cette partie, on montrait aussi que, si n est impair, $\dim(V) \leq 1$ et $d_n = 1$.

Dans la seconde partie, $n = 2p$, on montrait que, si p est impair, $d_n = 2$. Puis une étude faisait apparaître que $d_4 = 4$. En écrivant E comme somme directe orthogonale de trois sous espaces de dimension 4, on concluait que $d_{12} = d_4 = 4$. Un espace de matrices était alors proposé pour établir que $d_8 = 8$. Enfin, on demandait de conjecturer la valeur de $d_n : d_{2^q(2p+1)} = 2^q$.

Analyse globale des résultats

Le sujet comportait des parties « faciles », découlant directement des définitions ou de théorèmes classiques du cours, notamment les débuts des deux parties. Les « milieux et fins » de ces deux partiesétaient, en revanche, plus difficiles et permettaient de bien sélectionner les bons candidats. Ils exigeaient un effort de réflexion, de compréhension et parfois même d'ingéniosité (I.c.3 , II.c.6 et II.E par exemple).

L'écart-type est très important, plus de la moitié de la moyenne ; ce qui permet à l'épreuve d'être « discriminante ». Les très bons candidats font preuve, tout à la fois de maîtrise du cours dans son ensemble et de compréhension des enjeux. Par contre nous avons aussi vu dans d'autres copies des fautes de raisonnement grossières et des erreurs portant sur des notions de base ; par exemple, de nombreux candidats ignorent totalement ce qu'est un sous-groupe.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Au début de la première partie, les résultats découlent directement du cours. La plupart des candidats ne connait pas les définitions élémentaires : groupe, espace vectoriel. Il y a confusion entre le cardinal et la dimension. On voit souvent :

$$\dim(Sim(E)),\ \dim(f,g),\ \dim(base),\ \text{« } V \neq \varnothing \Rightarrow \dim(V) \geq 1 \text{ »}, \text{etc...}$$

Les candidats doivent savoir qu'il existe des ensembles qui ne sont pas des espaces vectoriels :

$GL(E^\circ)$, $Sim(E)$, $O(E)$, avec la conséquence qu'ils n'ont pas de dimension.

Une erreur fréquente à la question I.c.2 :

« $f \in Ker(\Phi) \Rightarrow \forall x \in E,\ f(x) = 0 \Rightarrow f = 0$ » ; ... facile, mais faux !

La plupart des élèves semble incapable de gérer un raisonnement par équivalence : ils débutent sur des équivalences (plus ou moins bien étayées), puis continuent sur des implications (elles-aussi plus ou moins bien étayées) et enfin terminent sur une équivalence !

À la question I.A.2, lors de la demande d'équivalence entre i, ii et iii, il est judicieux, tant pour le candidat (et surtout pour lui) que pour le correcteur, de préciser l'objet de la recherche ($i \Rightarrow ii$, par exemple). Par ailleurs, il faut toujours se méfier des raisonnements qui tendent à prouver directement une équivalence ($i \Leftrightarrow ii$). Ils conduisent souvent le candidat à ne pas voir une difficulté et à faire un raisonnement faux par négligence. Sauf si l'équivalence est vraiment évidente ($i \Leftrightarrow iii$, dans le cas présent), il vaut mieux décomposer en $i \Rightarrow ii$, puis $ii \Rightarrow i$ ou iii (ce qui constituait la partie « difficile »).

Certains candidats ne font preuve d'aucun esprit critique et « jouent sur les mots » :

« Si f est un automorphisme orthogonal, $\forall x \in E, (x, f(s)) = 0$ ».

À la question II.A.1.a :

« La famille $(f_1, \ldots, f_{d-1})$ est orthogonale car les f_i sont des automorphismes orthogonaux ».

La forme a aussi son importance ! Les correcteurs n'ont aucune demande « calligraphique », mais de futurs ingénieurs devaient être capables de fournir un texte lisible, si possible pas trop « truffé » de fautes d'orthographe.

Anecdotique mais désagréable : la plupart des candidats ne numérote pas les feuilles, les questions non plus, d'ailleurs. Le correcteur est souvent perplexe devant un « b) » , tout seul, perdu en début d'une feuille sans aucun repère ! Pour peu que le raisonnement soit lui-même un peu « fumeux », sa patience est mise à rude épreuve !

Enfin, au risque de se répéter, des affirmations du type :

« Il est clair que … », « Il est évident que … », « On voit immédiatement que … »,

pour justifier une proposition qui mérite d'être démontrée, se soldent par un zéro. Aucun point n'est prévu pour récompenser une conviction même si elle semble sincère. Le jury attend qu'on lui apporte une démonstration achevée, cohérente où les arguments soient clairement étayés

Conclusion

Ce sujet a bien rempli son rôle. L'écart-type est particulièrement important et les bonnes copies qui révèlent compréhension, connaissances et « inventivité » conjuguée avec rigueur obtiennent des notes en correspondance avec les qualités manifestées. Les très bonnes copies sont très rares mais le problème permettait aux meilleurs candidats de se distinguer et d'exprimer leur potentiel.