avec lequel chacun cherche à s'exprimer à travers une image, un personnage, un rôle peut apparaître comme davantage une marque d'aliénation qu'une marque de vérité personnelle.

Maîtrise de la langue : Nous relevons quelques « tics » lexicaux et autres maladresses inspirées du langage courant : « mettre en avant », « personnage éponyme », « le côté obscur du moi », « devenir un tueur est dans les cordes de Lorenzo », « Lorenzo, une machine à tuer, s'infiltre dans le gouvernement », etc. Il faudrait éviter les formulations emphatiques : parler de « l'entité moïque » est du plus mauvais effet. La syntaxe est malmenée : on relève trop de cumuls des interrogations directe et indirecte dans la même phrase (« on se demande si le moi est-il compréhensible ») – de la troisième personne du singulier et de la première personne du pluriel (« nous on n'y peut plus rien »), etc. La légèreté avec laquelle les candidats traitent le lexique français les entraîne trop souvent à commettre des glissements de sens, qui les précipitent dans le contresens. On apprend ainsi que « chez l'homme, l'inné se substitue à l'acquis » !

Mathématiques

Mathématiques I

Présentation du sujet

L'épreuve de Mathématiques I proposée cette année portait exclusivement sur les propriétés des séries numériques. La première partie faisait voir que, lorsqu'on permute l'ordre des termes dans la série harmonique alternée, on peut obtenir une série convergeant vers n'importe quel réel choisi à l'avance. La seconde partie donnait une caractérisation des séries de terme général a_n telles que la série de terme général $a_n u_n$ converge lorsque u_n est une suite bornée ou bien lorsque u_n est le terme général d'une série convergente. L'énoncé donnait une place importante à l'écriture d'algorithmes permettant de mettre en évidence numériquement les propriétés théoriques des séries considérées.

Analyse globale des résultats

L'énoncé étant assez long (38 questions), une majorité de candidats A délaissé certaines questions (notamment, les questions ID1-5) qui constituaient des étapes cruciales dans la progression vers le résultat de la partie I. De même, les questions IID2a à IID3e, qui réclamaient un traitement particulièrement soigneux et un effort de réflexion certain, n'ont été abordées de façon satisfaisante que dans un petit nombre de copies.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Les correcteurs ont remarqué tout particulièrement les erreurs suivantes, qui semblent poser des difficultés à la majorité des candidats. Il s'agit pourtant de questions de base relatives aux suites ou séries numériques, que les futurs candidats sont invités à approfondir :

1. si v_n tend vers L, alors $v_n = L$ à partir d'un certain rang ;
2. si u_n est décroissante et minorée par 0, alors u_n converge vers 0 ;
3. si $a_{n+1} - a_n$ tend vers 0, alors a_n converge ;
4. si $a_{n+1} - a_n$ tend vers 0, alors a_n est une suite de Cauchy ;
5. si la série de terme général a_n converge, alors $a_n = O(1/n^2)$;
6. toute suite convergente d'entiers est monotone à partir d'un certain rang (énoncé non justifié et utilisé pour répondre à la question IC1) ;
7. si $|S_{n+1} - x| \leq |S_n - x| + |u_{s(n)}|$, alors $|S_{n+1} - x| \leq \max(|S_n - x|, |u_{s(n)}|)$;
8. pour traiter la question IC1, de nombreux candidats admettent sans justification le fait que la limite d'une suite d'entiers est un entier ;
9. p_n tend vers l'infini et $q_n = n - p_n$ alors q_n tend vers l'infini ;
10. si s est une application de $\boldsymbol{N}$ dans $\boldsymbol{N}$ « vérifiant $Ker(s) = \{0\}$ », alors s est injective (cet énoncé n'a ici aucun sens puisque s n'est pas une application linéaire).

Les énoncés 1 à 5 sont des erreurs classiques sur les suites et séries numériques, qu'il est facile d'éviter en ayant bien assimilé la partie du cours portant sur ce thème. L'énoncé 6 est essentiellement équivalent à ce qu'il fallait démontrer et n'apporte rien. L'erreur 7 est une grave étourderie, puisqu'elle consiste à affirmer que $|a| + |b| \leq \max(|a|, |b|)$. Pour éviter ce genre d'erreur, il suffit de tester ce que l'on écrit sur un exemple numérique simple (par exemple $a = b = 1$). Les points 8 à 10 sont plus spécifiques au sujet de cette année.

Conclusion

Les correcteurs considèrent que la rédaction de la plupart des copies laisse beaucoup à désirer. Les futurs candidats doivent absolument faire des efforts particuliers en ce sens, et apprendre à rédiger de manière à la fois concise et précise. En effet, un raisonnement obscur, où certains arguments sont omis, mal compris ou même seulement imprécis, est toujours dévalorisé de façon significative par la notation. En outre, une rédaction claire des questions ou étapes intermédiaires d'un raisonnement aide les candidats eux-mêmes à mieux en comprendre le déroulement. Les correcteurs encouragent donc les élèves de classes préparatoires à progresser dans cette direction.

Mathématiques II

Présentation du sujet

Le sujet porte essentiellement sur l'algèbre des matrices carrées réelles d'ordre n, avec une petite étude géométrique sur un exemple.

Au début, on démontre que AB et BA ont mêmes valeurs propres avec mêmes ordres de multiplicité. Ensuite on introduit la notion de valeurs singulières de A, racines carrées des valeurs propres de ${}^tAA$ et on montre que A et B ont mêmes valeurs singulières si, et seulement si, $A = RBS$ pour deux matrices orthogonales R et S. Puis on considère, pour $n = 3$, une matrice de rang 2 et on effectue une étude de l'image de la sphère unité (euclidienne) par l'endomorphisme associé. On considère ensuite les cas où le rang est 3 ou 1. Enfin, on étudie les propriétés du « pseudo-inverse », A^+, de A pour résoudre, « au mieux », $A\,X = Y$ et on demande de montrer que $Y - A\,X$ est de norme minimale pour $X = A^+\,Y$.

Analyse globale des résultats

Le sujet comporte des parties « faciles », découlant directement des définitions ou de théorèmes classiques du cours, notamment toute la première partie et le début de la seconde. Les notes sont donc, en moyenne, relativement élevées. Les parties III, IV et V sont, en revanche, plus difficiles et permettent de bien sélectionner les bons candidats (moins d'un sur cent a pu aborder l'ensemble du sujet). L'écart-type est donc important, environ le tiers de la moyenne ; ce qui permet à l'épreuve d'être « discriminante ». Les très bons candidats font preuve, tout à la fois de maîtrise du cours dans son ensemble et de compréhension des enjeux. Par contre nous avons aussi vu dans d'autres copies des fautes de raisonnement grossières et des erreurs portant sur des notions de base ; certains candidats n'hésitent pas à « inventer » des théorèmes (faux) qui donnent miraculeusement réponse à la question qu'ils ne savent résoudre.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

Dans la première partie, les résultats découlent directement du cours. Notons que l'affirmation « $\det(AB) = \det(BA)$ par propriété du déterminant » dans de nombreuses copies est un peu succincte et que le correcteur aimerait que le candidat précise de quelle propriété il s'agit.

Ces questions ont été largement abordées par la plupart des candidats et plutôt bien traitées.

Rappelons cependant que, sur le corps des réels, les polynômes ne sont pas tous scindés ; par conséquent le déterminant n'est pas le produit des valeurs propres. Et c'est avec surprise qu'on trouve, pour A matrice carrée d'ordre n et X matrice colonne, des raisonnements du type :

$$\text{« } AX = 0 \iff \det(AX) = \det(A).\det(X) = 0 \iff \det(A) = 0 \text{ ou } \det(X) = 0 \iff A = 0 \text{ ou } X = 0 \text{ ».}$$

La seconde partie utilisait le « théorème spectral » qui est très mal connu des candidats.

On ne trouve presque jamais le bon énoncé :

« Si A est symétrique réelle, elle est diagonalisable sur une base orthonormée ».

« Si A est symétrique réelle, il existe une matrice orthogonale U telle que $UA{}^tU$ soit diagonale ».

On trouve souvent :

« Si A est symétrique réelle, elle est diagonalisable».

Ensuite se pose le problème de trouver une matrice de changement de bases conduisant à une base orthonormée, comme le demande l'énoncé.

Deux stratégies connaissent alors un certain succès :

- orthonormalisation de Gram-Schmidt (en général avec des orthographes fantaisistes), et, les candidats admettent alors, sans même se poser la question, que les vecteurs obtenus restent des vecteurs propres ;
- ou bien affirmation, a postériori, que toute base (ou bien la base) de vecteurs propres est orthonormée.

On voit aussi souvent : « Si A est symétrique réelle, elle est diagonalisable sur la base orthonormée formée de ses vecteurs propres»…