# Mathématiques II

## Présentation du sujet

Le sujet porte sur des études de distances d'un point à un ensemble et d'un ensemble à un autre. Il se situe dans l'espace des matrices réelles (3,3) et le sous-ensemble qui intervient dans toutes les parties est le groupe orthogonal, noté $O_3(R)$. On se trouve donc sur une partie essentielle du programme. Le problème est très bien gradué et débute par une première partie « facile », application directe du cours pour terminer par une quatrième partie beaucoup plus « géométrique » qui exige des qualités de compréhension et qui n'a été abordée, pour les questions difficiles, que par un nombre très restreint d'élèves.

## Analyse globale des résultats

Les résultats montrent que les très bons candidats font preuve, tout à la fois de maîtrise du cours dans son ensemble et de compréhension des enjeux du sujet proposé. Par contre, nous avons aussi vu dans d'autres copies des fautes de raisonnement grossières et des erreurs portant sur des notions de base qui révèlent une incompréhension totale de concepts élémentaires. Le « spectre » des candidats est très étendu. Certains candidats sont vraiment « brillants », rigoureux, logiques, pendant que d'autres se « réfugient » dans une argumentation fausse dès la première ligne sans se préoccuper de la moindre vraisemblance.

## Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

- La première partie porte sur des généralités relatives à la distance d'une matrice au groupe orthogonal $O_3(R)$. Plus de la moitié des candidats ont affirmé que « $O_3(R)$ est un sous-espace vectoriel » et utilisé le théorème de Pythagore (cette erreur n'était pas prévue !). Moins grave, mais faux quand même, $O_3(R)$ a été défini comme l'image réciproque de $\{-1,1\}$ par l'application déterminant ou de $\sqrt{3}$ par l'application « norme »…

  Puis on y étudie la distance d'un sous-espace vectoriel $P$ à $O_3(R)$. Cette question n'a jamais été traitée correctement. Voici le « raisonnement » souvent vu dans les copies :

  « si on prend r très grand, on a $P \subset B_f(0,r)\ldots$ » (sic)

  Effectivement, il vaut mieux le prendre très grand !

  Nous assistons à l'apparition d'une nouvelle géométrie où les droites et les plans sont bornés pour près d'un candidat sur trois.

  Elle a largement été abordée par la plupart des candidats et s'est révélée, d'emblée très discriminante.
- La seconde partie concerne la décomposition polaire d'une matrice (3, 3). L'erreur la plus fréquente porte sur la positivité des valeurs propres de ${}^tM\ M$. Il a souvent été dit que, si la somme et le produit des valeurs propres était positifs, alors celles-ci étaient positives. Plus grave : il est souvent affirmé que les valeurs propres sont sur la diagonale de ${}^tM\ M$ ; on les obtient alors « à vue ».
- La troisième partie permet de mettre en évidence une matrice privilégiée dans $O_3(R)$ et de montrer que, si D est diagonale, on a : $d(D,O_3(R)) = \| D - I_3 \|$. Le début est d'un niveau soutenu ; seuls les très bons candidats ont pu faire la partie III.A.2. Mais la suite du problème pouvait être traitée indépendamment de cette partie, en admettant le résultat final.
- La quatrième et dernière partie permet de démontrer que, si V est un sous-espace vectoriel de dimension 6 dans l'espace des matrices (3, 3), alors $d(V,O_3(R)) \leq 1$. La question IV.B. et la seconde partie de IV.C. sont particulièrement difficiles (et intéressantes) et n'ont presque pas été traitées. Par contre, le début de IV.C. est un calcul de dérivées élémentaire qui s'est soldé par un constat surprenant : pour plus de la moitié des candidats, la dérivée de **1** est **1** !

## Conclusion

Le jury pense que ce sujet a très bien rempli son rôle. L'écart-type est particulièrement important et les bonnes copies qui révèlent compréhension et connaissances obtiennent des notes en correspondance avec les qualités manifestées.