Partie III

A. Là encore, peu comprennent ce que signifie la phrase « vérifier que l'on peut définir une application… ». La démonstration de la linéarité est souvent longue et pénible.

B. Cette question n'a été traitée avec succès que dans les meilleures copies.

C. Cette question n'est également bien traitée que dans les meilleures copies. Beaucoup confondent existence et unicité et n'hésitent pas à écrire « si une solution existe, d'après l'injectivité de Ψ, elle est unique donc la solution existe et est unique ».

D. Ceux, peu nombreux, qui connaissaient la structure affine de l'ensemble des solutions de (L), ont traité cette question sans problème.

Partie IV

A. La question ouverte relative aux autres solutions de L_b a fait des ravages.

B. Cette question n'est traitée que par les meilleurs candidats, ceux qui ont su résoudre la question III.C. D'autres parlent de polynômes échelonnés mais cette seule évocation ne suffit pas à faire une démonstration.

C. Peu de candidats justifient clairement la formule : ils se contentent en général de donner la dérivée k-ième de Π_p (parfois avec des erreurs!) et d'écrire le résultat.

D. Moins de 2% abordent cette question.

E.a. Certains oublient les modules pour faire des majorations.

E.b. Ceux qui abordent cette question la traitent correctement.

F. Le théorème de dérivation d'une série de fonctions est en général bien énoncé mais la vérification des hypothèses est rarement correcte.

Les questions H, I, J ne sont abordées que dans les très bonnes copies.

Conclusion

L'algèbre linéaire du début en a dérouté beaucoup, qui se perdent dans des démonstrations sans fin par manque de recul sur des définitions de base. Les techniques usuelles (prouver qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, qu'une application est linéaire, trouver une dimension…) sont souvent mal maîtrisées. Sur les séries entières, beaucoup sont obnubilés par ce qu'ils ont fait pendant l'année scolaire et veulent le replacer à tout prix sans se soucier de la question posée, ainsi l'unicité du développement en série entière est invoquée sans raison.

Mathématiques II

Présentation du sujet

L'étude des récurrences linéaires $u_{n+1} = \lambda_1 u_n + \ldots + \lambda_k u_{n-k+1}$ (k un entier, $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ des scalaires complexes fixés, $\lambda_k \neq 0$) conduit à étudier les puissances de la matrice compagnon associée au polynôme $P(X) = X^k - \lambda_1 X^{k-1} - \ldots - \lambda_k$. Si une racine complexe ρ de P est de multiplicité m, elle contribue à l'espace vectoriel des suites récurrentes décrit ci-dessus par les m suites (linéairement indépendantes) $(\rho^n)_{n\geq 0}, (n\rho^n)_{n\geq 0}, \ldots, (n^{m-1}\rho^n)_{n\geq 0}$.

Le problème propose d'examiner les propriétés de convergence ou de périodicité des suites récurrentes linéaires, ce qui se ramène à la même question pour les suites $(n^m\rho^n)_n$ vues plus haut. Une deuxième partie propose quelques éléments d'étude des produits de matrices $A_n \ldots A_1 A_0$, alternant des exemples et des questions plus abstraites d'engendrement et d'indépendance linéaires.

Analyse globale des résultats

La plupart des questions sont élémentaires, ne demandant que des rudiments d'algèbre linéaire. Cela explique sans doute que les correcteurs de cette épreuve n'ont pas relevé de lacune particulièrement grave et générale.

Les copies ont été assez longues. Les qualités de méthode et d'ordre ont beaucoup compté dans le résultat des candidats.

La longue Partie I a été abordée par la plupart des copies. Les différences entre les candidats ont surtout concerné le traitement de la Partie II qui a permis à un quart des candidats de se distinguer assez nettement.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux candidats

I.A.3.a - Noter qu'il s'agit ici de trouver toutes les matrices inversibles Q telles que $AQ = QD$.

I.A.4.b - Même remarque que précédemment, avec la subtilité que les matrices Q dépendaient de deux paramètres dont l'un décrit $\mathbf{C}^*$ comme à la question précédente mais l'autre décrit $\mathbf{C}$ tout entier.

I.A.5 - Les candidats connaissent bien le théorème selon lequel une matrice dont le polynôme minimal est scindé et dont les racines sont simples, est diagonalisable. Il convient d'éviter d'en faire un cas « préféré » de matrice diagonalisable, pour éviter l'idée qu'on aurait là une condition nécessaire (le cas de la matrice nulle doit servir de garde-fou).

De même, il existe des matrices triangulaires qui sont diagonalisables mais non diagonales, sur le modèle de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en dimension 2…

I.A.6 - Les correcteurs ont admis toute expression exacte. Noter toutefois que des formules simples du type $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ pouvaient aider à simplifier le résultat.

Notons que les candidats pouvaient vérifier que leurs formules donnaient bien x_0 et x_1 pour $n = 0$ et 1. Peu semblent l'avoir fait.

I.B.2 - L' injectivité a (trop) souvent été testée sous la forme $\Phi(x) = \Phi(y) \Longrightarrow x = y$. La surjectivité a plus rarement été abordée. Rappelons que le corollaire du théorème du rang qui affirme que l' injectivité implique la bijectivité quand les deux espaces vectoriels ont même dimension… n'est valable qu' en dimension *finie*. A contrario beaucoup de candidats ont bien vu que la corrélation entre les coordonnées de $\Phi(x)_{n+1}$ et de $\Phi(x)_n$ empêchait la surjectivité de Φ.

I.C.1 - On peut remarquer que dans cet exemple c'est la suite $(A^n)_n$ elle-même qui converge vers le projecteur sur l'espace propre de la valeur propre 1 parallèlement aux autres espaces propres.

I.C.2 - On notera que dans cet exemple la suite $(A^n)_n$ elle-même est périodique : $A^6 = I_3$, ce que l'on vérifie impérativement sur ses valeurs propres qui sont des puissances de $e^{\frac{2i\pi}{6}}$. On notera d'ailleurs que $P(x) = (X-1).Q(X)$ où Q est le sixième polynôme cyclotomique.

I.C.3.b - Ici, pour montrer que A n'est pas diagonalisable, la décomposition de Jordan (et son unicité) n'étant pas au programme, il fallait se ramener au cas de T et vérifier que $\ker(T - \mu I)$ est de dimension 1. Quelques candidats ont fait ce raisonnement de façon correcte.

I.C.3.c - Peu de candidats ont su trouver tous les cas demandés. Notons que la question est en fait équivalente à la question de la convergence de la suite de puissances $(A^n)_n$.

II.A - L' écriture

$$\prod_{i=0}^{n} A_i$$

est à proscrire lorsqu'on ne travaille pas dans un anneau commutatif… surtout si cette formule doit signifier en fait $A_n A_{n-1} \ldots A_0$.

Beaucoup de candidats ont invoqué le théorème de Cauchy-Lipschitz sur les équations différentielles, peut-être abusés par le terme de « condition initiale » utilisé par l'énoncé. Le problème posé ici est de nature différente. Nous conclurons en notant que c'est la théorie des suites linéaires récurrentes de la Partie 1 qui rappelle la théorie des équations différentielles linéaires. Le point commun étant les matrices de Jordan $J_{k,\rho} = \rho I_k + J_k$ (où ρ est un nombre complexe et $J_k$est la matrice compagnon de X^k, dont on calcule les puissances $(J_{k,\rho})^m$ dans le cas des suites,ou l'*exponentielle* $\exp(tJ_{k,\rho}) = \sum_{m=0}^{k-1}(m!)^{-1}t^m e^{\rho t}(J_k)^m$ dans le cas des équations différentielles.

Conclusion

Une bonne moitié des candidats parait doté de connaissances solides sur les rudiments d'algèbre linéaire : produit de matrices d'ordre 2 ou 3, valeurs propres, indépendance linéaire.

Sciences physiques

Physique I

Présentation du sujet

Le problème posé cette année aborde différentes parties du programme de première et de deuxième année (diffusion particulaire, électrostatique, mécanique des fluides, mécanique du solide, thermodynamique) par l'étude biophysique de la bactérie Escherichia Coli.

Les très bons candidats ont pu traiter l'ensemble du sujet sans bâcler leur rédaction et en formulant des réponses de qualité car l'épreuve était de longueur adéquate.

La rédaction en quatre parties indépendantes a permis à tous les candidats de s'exprimer et de valoriser leurs connaissances dans l'un ou l'autre des domaines du programme abordés. La difficulté des questions est variable, quoique non progressive, permettant