EPREUVE ECRITE DE MATHEMATIQUES 1 - SESSION 2008

Alain CHAURÉ
Maitre de Conférences à l'Université de Reims

Remarques générales sur l'épreuve

L'épreuve de Mathématiques 1 de la session 2008 porte sur l'étude de conditions pour lesquelles, étant donnés n nombres réels distincts ou non, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, il existe une matrice carrée réelle d'ordre n symétrique, à coefficients positifs, admettant pour valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ comptées avec multiplicité. Dans la première partie on considère quelques exemples simples. Dans la seconde, on montre que si S est une matrice carrée réelle symétrique à coefficients positifs, de plus grande valeur propre α, alors α est positif, S admet pour la valeur propre α un vecteur propre à coordonnées positives et toute valeur propre λ de S vérifie $|\lambda| \leq \alpha$. La troisième partie, plus technique, permet de connaître les valeurs propres d'une matrice carrée réelle positive symétrique à coefficients positifs d'ordre $n + p$ construite à partir de deux matrices A et B carrées réelles symétrique à coefficients positifs d'ordres respectifs n et p dont on connaît les valeurs propres. Enfin la dernière partie donne des conditions suffisantes pour qu'il existe une matrice carrée réelle symétrique à coefficients positifs d'ordre n admettant pour valeurs propres comptées avec multiplicité, n réels donnés.

Le sujet proposé cette année, de l'avis de l'ensemble des correcteurs, était plus simple et plus abordable que les années précédentes : ceci est d'ailleurs confirmé par l'augmentation sensible du nombre de candidats qui ont traité la totalité ou quasi-totalité du problème. Néanmoins le niveau global des copies est toujours aussi décevant et révèle plusieurs défauts dont les candidats ont beaucoup de mal à se départir d'une année sur l'autre. Voici quelques points importants notés par les correcteurs.

Un niveau de connaissances et de compréhension insuffisant : comment peut-on après deux années de classe préparatoire ne pas savoir effectuer correctement le produit d'une matrice 2×2 par un vecteur, écrire qu'un exemple de matrice possédant les valeurs propres $-1, 0, +1$ est la matrice nulle, que le produit scalaire $(X \mid Y)$ est le vecteur de composantes $x_i y_i$ ou encore affirmer ne pas savoir ce que signifie D semblable à S. Ces quelques exemples ne sont malheureusement pas isolés : chacun des correcteurs a eu droit à sont lot de perles.

Un manque de lucidité et d'attention : ceci est particulièrement vrai dans la partie I. Beaucoup de candidats ont confondu la notion de matrice symétrique à coefficients positifs définie dans l'énoncé avec celle plus habituelle de matrice symétrique à spectre positif ; pourtant la partie introductive de l'énoncé était très claire sur ce point, mais certains ont sans doute voulu replacer des pans entiers de questions d'épreuves des années précédentes. D'autres ont proposés parmi les exemples demandés aux questions I.2 à I.4 des matrices avec des coefficients strictement négatifs. A la question I.6.b, une réponse en dimension 2 ou 3 est souvent proposée alors que l'énoncé exige de considérer le cas général n quelconque.

Un manque de rigueur et de logique trop fréquent : dans la partie I trop d'exemples de matrices ont été proposés sans la moindre justification, un minimum d'explications ou références aux questions qui précèdent est indispensable.

Pour l'immense majorité des candidats qui ont introduit le complémentaire de E à la question II.4, ce complémentaire est défini comme l'ensemble des matrices colonnes dont tous les coefficients sont strictement négatifs et non comme celui des matrices colonnes dont au moins un coefficient est strictement négatif.

Le symbole de double implication est trop souvent utilisé de manière systématique sans justification.

Il est fréquent de voir affirmer qu'un vecteur est un vecteur propre sans s'assurer qu'il est non nul.

A la partie III, la vérification qu'une famille de vecteurs constitue une base orthonormée est rarement faite correctement ; certaines conditions d'orthogonalité ou de normalité sont oubliées et souvent des raisonnements erronés sont avancés : dans de nombreuses copies, il a été considéré que les valeurs propres α_i et β_i étaient distinctes.

Un manque de technicité dans les calculs : à la question I.6, le calcul du polynôme caractéristique de la matrice H, lorsqu'il est entrepris, est souvent mal présenté, mal expliqué et dans de nombreux cas abandonné sans succès. La maîtrise des opérations élémentaires sur les rangées laissant invariant un déterminant est manifestement à améliorer.

Dans la partie III beaucoup trop de candidats partent de l'équation (2) pour la justifier et on trouve beaucoup de copies où cette égalité donne lieu à des calculs interminables, souvent mal présentés ou n'aboutissant pas. Curieusement la multiplication par l'expression conjuguée pour rendre un dénominateur rationnel est très peu utilisée.

La manipulation des inégalités est également inquiétante. Le nombre de fois où l'on a lu à la question IV.2.a, $\lambda_1 \geq 0 \geq \lambda_{n+1}$, donc $a = \lambda_1 + \lambda_{n+1} \geq 0$ est loin d'être négligeable. De même à la question II.5.c : α est positif et pour tout i, $\lambda_i \leq \alpha$, donc $|\lambda_i| \leq \alpha$.

Remarques plus précises concernant chacune des questions du problème

Partie I

I.1 – Cette question est paradoxalement une des moins bien réussies de l'épreuve, car un nombre trop important de candidats souhaite à tout prix utiliser le théorème spectral et affirme par exemple que puisque toute matrice symétrique réelle est diagonalisable, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ existent.

I.2.a – La définition du polynôme caractéristique est majoritairement erronée par omission du coefficient dominant $(-1)^n$, alors que cette définition était indiquée dans le préambule de l'énoncé.

I.2.b – L'exemple est très souvent obtenu par conditions nécessaires, mais le fait que réciproquement il convienne n'est pas toujours établi.

I.3,4 – Pour ces questions, on trouve un tiers des candidats qui ont compris le fonctionnement des matrices par blocs et répondent alors rapidement, un tiers qui entreprend des calculs avec coefficients indéterminés souvent sur plusieurs pages et sans succès et les autres qui n'ont pas vraiment compris la question et proposent des résultats fantaisistes.

I.5 – Peu de candidats pensent à utiliser directement la trace. Plus nombreux sont ceux qui calculent explicitement le polynôme caractéristique d'une matrice symétrique réelle à coefficients indéterminés et peuvent conclure s'il n'y a pas eu de faute de calculs en cours de route.

I.6.a – Trop rarement abordée avec succès. Les meilleurs proposent la solution élégante basée sur l'étude du rang de $H - (a-b)I_n$ et terminent par un argument de trace.

I.6.b – Cette question n'a été bien traitée que par les candidats qui avaient réussi la précédente. Parmi les autres certains ont proposé des exemples de matrice d'ordre 2 seulement.

Partie II

II.1.a,b,c – Correctement traité sauf par les candidats très faibles ou ceux qui ont pensé qu'il s'agissait de démontrer que $(X, Y) \longmapsto {}^tXY$ définissait un produit scalaire.

II.2.a – Erreur fréquente de transposition par blocs en oubliant de transposer chaque bloc.

II.2.b – Cette question a donné lieu à une erreur inquiétante de la part de candidats qui confondent la notion de matrice orthogonale et celle de vecteurs orthogonaux sans se rendre compte de l'incohérence de l'écriture matricielle ${}^tXX = I_n$.

II.2.c – La plupart des candidats affirme que la réciproque est fausse sans donner un contre-exemple explicite. Quelques-uns déduisent que la réciproque est vraie car $(X \mid Y)_n$ et $(U \mid V)_p$ sont positifs du fait qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive !

II.3.a – On trouve beaucoup trop de raisonnements farfelus du genre $D \leq \alpha$ ou $DY \leq \alpha Y$, donc par produit $(DY \mid Y) \leq \alpha(Y \mid Y)$.

II.3.b – On a trop souvent rencontré l'argument : comme S et D sont des matrices semblables, $(SX \mid X) = (DX \mid X)$!

II.3.c – Cette question est très rarement bien traitée. La majorité n'a pas bien assimilé qu'il est préférable de raisonner en deux temps, d'abord montrer une implication et ensuite l'implication réciproque. Et parmi ceux qui procèdent ainsi, l'immense majorité commet l'erreur de croire qu'il n'y a qu'une seule valeur propre égale à α dans l'ensemble des valeurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

II.4.a,b – Les définitions de fermé et de borné sont mal connues des candidats : nombreux sont ceux qui ont passé ces questions ou qui se sont lancés dans des explications dénuées de rigueur, telles que « l'inégalité est large, donc E est fermé » ou bien « C est borné car il est minoré et majoré ». Les meilleures solutions ont été produites par la caractérisation séquentielle des fermés, plus rarement par l'image réciproque d'un fermé par une application continue, bien que ces résultats ne figurent pas au programme de PC.

II.4.c – L'expression de $\varphi(X)$ est loin d'être toujours exacte, souvent on n'y trouve que les termes carrés et la continuité est trop rarement correctement justifiée, certains ont même osé affirmer que φ était linéaire. Un argument couramment utilisé est « φ est continue par somme et produit » sans jamais préciser de quelle somme ou produit il s'agit.

II.4.d – Alors qu'il s'agit simplement de citer un théorème fondamental du cours d'analyse, à savoir qu'une fonction à valeurs réelles continue sur un compact non vide est bornée et atteint ses bornes, on trouve beaucoup de réponses montrant que les candidats n'ont pas du tout assimilé les différentes notions rattachées à cet énoncé. Par exemple « l'image continue d'un ensemble borné est bornée » ou « C est compact, donc admet un minimum et maximum et $\varphi(C)$ aussi ».

II.4.e – Question en général bien traitée.

II.5.a – Question facile bien réussie sauf pour le point ii) qui n'a été correctement justifié que par ceux qui avaient obtenu l'expression correcte de $\varphi(X)$ en II.4.c.

II.5.b – Certains candidats ont des difficultés à déduire $\alpha \geq 0$ à partir de $\alpha \geq \mu \geq |\alpha|$. Très peu de candidats ont vu que X_0 était vecteur propre de S pour la valeur propre α d'après II.3.c. On a souvent eu droit à des raisonnements fantaisistes du type « si $S \geq 0$ et $\alpha \geq 0$, $SX = \alpha X$ implique $X \geq 0$ ».

II.5.c – Résultat sidérant pour cette question : la grande majorité de ceux qui l'ont abordé considère que $\alpha \geq 0$ et $\lambda_i \leq \alpha$ implique $|\lambda_i| \leq \alpha$.

Partie III

III.1 – Le calcul matriciel par blocs est de mieux en mieux maitrisé, les épreuves des années précédentes y sont sans doute pour quelque chose. Certains sont cependant capables de trouver pour valeurs propres des matrices blocs !

III.2.a – On voit trop souvent dans les calculs le terme X_1^2 au lieu de ${}^tX_1X_1$.

III.2.b – La question est rarement bien rédigée, même si le résultat est souvent juste. Le polynôme caractéristique de M_0 est noté $\det(M_0 - X)$ et pour certains le spectre de M_0 est $\{A, B\}$!

III.2.c.i – Question facile, mais pas toujours rédigée avec la rigueur souhaitable.

III.2.c.ii – On est effaré par le nombre de candidats qui ne savent transformer $\tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{2}\right)$ ou qui n'hésitent pas à manipuler $\tan\dfrac{\pi}{2}$.

III.2.c.iii – En général les calculs sont laborieux et mal conduits. Seuls ceux qui font apparaître $\tan\theta_1$ comme racine d'une équation du second degré s'en sortent bien.

III.2.c.iv – Question assez souvent traitée, mais la non nullité des vecteurs $V(\theta_i)$ n'est pratiquement jamais mentionnée.

III.2.c.v – Cette question facile a donné lieu à des réponses décevantes. Les conditions d'orthogonalité entre les différents vecteurs sont en général incomplètes et la liberté de la famille de vecteurs est souvent vue comme une conséquence du fait qu'il s'agit d'une famille de vecteurs propres, alors que les valeurs propres ne sont pas nécessairement distinctes. En revanche la liberté comme conséquence de l'orthogonalité est mentionnée très rarement.

III.2.c.vi – Une immense majorité des candidats qui a abordé cette question obtient un résultat erroné du fait de l'utilisation de l'égalité $\sqrt{(\alpha_1-\beta_1)^2}=\alpha_1-\beta_1$!

Partie IV

IV.1 – Souvent traitée , mais la matrice d'ordre 1 est la plupart du temps notée λ_1 au lieu de (λ_1).

IV.2.a – La positivité de a est correctement justifiée dans très peu de copies.

IV.2.b – Seuls les candidats qui ont remarqué que a était la plus grande valeur propre et fait le lien avec la partie II ont traité cette question de manière satisfaisante.

IV.2.c.i – Les candidats qui ont pris soin de vérifier que $Y_1=(1)$ était vecteur propre de la matrice $B=(0)$ doivent se compter en quelques dizaines.

IV.2.c.ii – Question peu abordée et parmi les réponses, beaucoup sont fantaisistes.

IV.2.c.iii – Question assez bien traitée par ceux qui l'ont abordée. On peut seulement regretter que la conclusion de la récurrence n'ait pas toujours été rédigée soigneusement.

IV.3.a – Beaucoup de candidats ont repéré cette question qui leur a permis de grapiller des points. Mais certains ont quand même des difficultés à factoriser rapidement le polynôme caractéristique par utilisations des opérations élémentaires sur les rangées d'un déterminant.

IV.3.b – Question peu abordée et réussie seulement par les meilleurs candidats.