EPREUVE DE MATHEMATIQUES B

Durée : 3 heures

PRÉSENTATION DU SUJET

Cette épreuve comportait trois exercices, portant sur des parties bien distinctes du programme de mathématiques : série de FOURIER, calcul différentiel et géométrie euclidienne.
Dans le premier exercice, on mettait en évidence un exemple de fonction développable en série de FOURIER au sens de la convergence normale, mais ne relevant pas pour autant du théorème de DIRICHLET. Après avoir d'abord majoré une intégrale à paramètre, on considérait une fonction définie par une représentation graphique en demi-cercles : il s'agissait alors d'en déterminer l'expression, de calculer sa série de FOURIER et d'établir, grâce à la majoration de la première question, la convergence normale de celle-ci. Il fallait bien connaître son cours pour confronter correctement les propriétés de cette série aux théorèmes classiques.
Le deuxième exercice étudiait les solutions d'une équation aux dérivées partielles du second ordre. Il fallait démontrer que les solutions ne s'annulant pas étaient les fonctions de classe C^2 à variables séparées, c'est-à-dire de la forme $(x, y) \mapsto \varphi(x)\psi(y)$, puis examiner quelques conséquences de cette forme particulière des solutions. La dernière question proposait alors la construction d'un contre-exemple : une solution qui s'annulait en certains points mais n'était plus à variables séparées. Tout cela demandait une bonne compréhension de ce que sont les fonctions de deux variables et de ce qui les distingue des fonctions d'une variable.
Le dernier exercice visait à déterminer, dans un espace euclidien de dimension 3, l'ensemble des droites situées à la distance 1 de deux droites parallèles Δ et Δ' elles-même distantes de 1. On caractérisait d'abord, à l'aide d'une projection orthogonale, la distance entre deux droites quelconques. On comparait ensuite les droites situées à la distance 1 de Δ aux droites incluses dans un plan tangent au cylindre de révolution d'axe Δ et de rayon 1. On décrivait enfin l'ensemble recherché grâce à deux cylindres d'axes Δ et Δ'. et à leurs plans tangents communs. Comme toujours en géométrie, une bonne intuition des configurations proposées permettait de contrôler la pertinence de ses réponses et d'orienter ses raisonnements.

ANALYSE PAR EXERCICE

Au I 1°a, la notion de convergence absolue d'une intégrale (ou d'intégrabilité d'une fonction) n'était pas toujours maîtrisée et les équivalents ont souvent été utilisés sans précaution.
Le I 1°c demandait un peu de persévérance mais ne faisait appel qu'à des techniques usuelles de majoration (inégalité triangulaire et inégalité de la moyenne) ; bien peu de candidats en sont venus à bout, mais la réponse fournie leur permettait de continuer.
En I 2°a, il fallait écrire l'équation d'un cercle de centre O puis exprimer y en fonction de x ; le tiers des candidats qui ne trouvait pas cette expression de f(x) en était ensuite très pénalisé.
À la question I 2°b, les hypothèses précises du théorème de DIRICHLET n'étaient pas toujours bien énoncées ; mais il s'avère surtout que, même lorsqu'elles sont correctement formulées, elles ne sont pas comprises : en effet, très peu de candidats ont su dire que la fonction f n'était pas de classe C^1 par morceaux, si bien que la finalité de l'exercice leur échappait.
En revanche, les calculs du I 3° ont souvent été menés à bien et, au I 4°a, beaucoup ont su établir la convergence normale de la série de FOURIER de f.
En définitive, malgré certaines maladresses et incompréhensions, cet exercice a permis à la majorité des candidats de montrer sa connaissance de cette partie importante du programme.
Au II, la résolution de l'équation, répartie entre les questions 1°a et 1°b, nécessitait à chaque fois un raisonnement en deux étapes. Si l'on peut comprendre que l'étape difficile ne soit pas toujours surmontée, on attend au moins des candidats assez de lucidité pour ne pas croire que la simple vérification de la formule proposée constitue une démonstration complète. Pour

démontrer la réciproque, encore fallait-il ne pas confondre les fonctions d'une variable avec les fonctions de deux variables comme ceux qui au II 1°a proposent, pour définir $a(x)$ une expression en x et y, sans se soucier de prouver que cette expression ne dépend pas de y.
Dans le même esprit, au II 1°c, certains croient prouver l'existence de la fonction f en déduisant un résultat exact des formules qu'elle est censée vérifiée. Rappelons que, faute d'un théorème d'existence adéquat, la preuve de l'existence de f nécessite dans un tel cas que l'on construise une solution f à partir des fonctions g et h données initialement, et non l'inverse.
Au II 2°, la plupart des candidats se sont égarés en prétendant caractériser un maximum à l'aide de dérivées partielles, là où l'énoncé de la définition d'un maximum leur aurait suffi.
Le II 3°, d'apparence plus facile, s'est aussi révélé décevant, la majorité des candidats étant persuadée que la fonction valeur absolue est de classe C^2 et peut se dériver sans précaution.

Au III 1°, il fallait maîtriser l'articulation entre les points de vue affine et vectoriel, dont le principe était rappelé pour les projections ; faute de cela, les démonstrations étaient confuses.
D'autre part, même si cela ne tient pas lieu de preuve, le recours à l'intuition a son utilité, par exemple pour s'apercevoir que la projection d'une droite peut se réduire à un point et éviter alors d'affirmer au III 2°a, sans restriction préalable, que la projection p est bijective.
À la question III 3°, beaucoup ont su écrire l'équation du cylindre, mais bien peu ont songé à prendre pour vecteur normal au plan tangent le gradient de la fonction correspondante.
Au III 4°, quelques candidats se sont valorisés en décrivant correctement l'ensemble cherché.

Finalement, on peut regretter que beaucoup de candidats se soient consacrés principalement à l'exercice I et n'aient guère approfondi les deux autres. Mais malgré cela, la majorité des copies témoigne d'une préparation sérieuse et un nombre significatif de candidats a réussi à dépasser très positivement l'appréhension suscitée par les thèmes de ces exercices II et III.

CONSEILS AUX FUTURS CANDIDATS

Cette épreuve d'exercices est l'occasion pour le jury d'évaluer les connaissances et le savoir-faire des candidats sur des questions qui feraient plus difficilement l'objet d'un problème de quatre heures. Les candidats ne doivent donc négliger aucune partie du programme des deux années de préparation. Il faut savoir par exemple que les fonctions de plusieurs variables, indispensables en physique, jouent aussi un rôle crucial dans les mathématiques actuelles. De même, il va de soi que si la géométrie est une discipline mathématique nettement plus ancienne, elle ne saurait sans dommage être négligée dans la formation de futurs ingénieurs.

Il convient ensuite de rappeler l'extrême importance d'une bonne connaissance du cours. Mémoriser un théorème majeur est bien sûr essentiel, mais reste tout à fait vain pour celui qui ne sait ni ne comprend les définitions qui le précèdent. C'est ainsi que savoir définir une fonction de classe C^1 ou C^2, par morceaux ou non, un maximum local ou un plan tangent à une surface, aurait évité ici bien des performances décevantes au regard du travail accompli.

Le plus difficile reste enfin de savoir articuler ses connaissances dans des démonstrations cohérentes. Cette exigence de logique est sans doute plus difficile à satisfaire, mais on peut s'y préparer par une vigilance accrue : ne jamais clore une démonstration sans s'assurer qu'on n'a rien oublié, comme une réciproque, une preuve d'existence ou un cas particulier . . .