Mathématiques 1

Monsieur DE SAINT JULIEN Arnaud

1 Présentation du sujet

Ce problème s'intéresse à la fonction Zeta alternée de Riemann. Il est constitué de quatre parties dans une large mesure indépendantes mise à part la partie III, qui utilise des résultats de la partie I.

Dans la partie I, on établit quelques généralités sur Zeta alternée : son caractère de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, sa valeur en 1, sa limite à l'infini, et son lien avec la fonction Zeta. Dans la partie II, on étudie la nature du produit de Cauchy de la série Zeta alternée par elle même. Cela illustre en particulier le fait qu'un produit de Cauchy de deux séries convergentes n'est pas nécessairement convergent. Dans la partie III, on donne deux développements asymptotiques de Zeta au voisinage de 1, ce qui nous permet d'obtenir la valeur exacte d'une série. Dans la partie IV, on montre à l'aide des polynômes de Bernoulli et d'un développement en série de Fourier que les nombres $\zeta(2k)$ s'expriment à l'aide de π^{2k} et du nombre de Bernoulli b_{2k}. La dernière question du problème demande d'écrire un algorithme permettant de calculer les nombres de Bernoulli.

Le problème était bien construit, détaillé et progressif, mais peut-être un peu long (même si certains candidats ont abordé toutes les questions). Le technique et le théorique sont tous deux abordés. Les thèmes mis en jeu balayaient une très large partie du programme d'analyse :

- Suites et séries de fonctions : convergence normale, uniforme, théorème de la double limite, théorème de dérivation terme à terme, théorème de convergence dominée
- Suites et séries numériques : critère série alternée, divergence grossière, produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes, comparaison série intégrale.
- Développements limités, formule de Taylor pour un polynôme
- Séries de Fourier

2 Appréciation générale des copies

Les résultats des candidats sont dans l'ensemble un peu décevants, même si la fourchette des notes est très large. Décevant car dans trop de copies, le cours est connu de manière superficielle, en atteste la méconnaissance des hypothèses de certains théorèmes fondamentaux : théorème de convergence dominée, théorème de dérivation sous le signe somme, théorèmes de convergences sur les séries de Fourier. Le barême interdit à un candidat ne connaissant pas son cours d'être performant, tout en sélectionnant sur l'aisance calculatoire et les techniques usuelles. Un étudiant sérieux «n'aura pas révisé pour rien» comme on peut parfois l'entendre à la sortie de certaines épreuves.

Il y a encore quelques candidats qui rendent une copie mal rédigée et/ou mal présentée, ils ont été pénalisés. La rigueur fait aussi défaut, attention à l'utilisation du «si et seulement si».

Donnons trois conseils pour terminer :
- il y a une différence entre «justifier» et «montrer que» ; un «justifier» attend généralement une réponse rapide.
- soigner votre copie et encadrer vos résultats.
- si la calculatrice est autorisée, et que l'on demande par exemple de déterminer un développement limité sans **explicitement demander le détail du calcul**, on peut écrire directement sur la copie le résultat fourni par la calculatrice !

En résumé, c'est un sujet qui a bien joué son rôle et permis de bien classer les candidats.

3 Remarques détaillées par question

1. Généralités

1. - Bien sûr, l'erreur la plus classique a été d'oublier de démontrer que si $x \leqslant 0$ alors $x \notin \mathcal{D}_f$.
   - Certains ont cru bien faire en considérant le théorème des séries alternées comme une équivalence, ce qu'il n'est pas (il y a des séries alternées $\sum(-1)^n a_n$ convergentes où (a_n) n'est pas décroissante par exemple avec $a_n = \dfrac{\cos n}{n^2}$).
   - L'hypothèse de décroissance a été régulièrement oubliée.
2. - La convergence de la série géométrique a souvent été escamotée : notamment, il faut préciser qu'elle converge parce que $|t| < 1$.
   - Utiliser la somme de la série entière pour donner sa limite est assez maladroit (on sait que la somme partielle vaut $\frac{1-(-t)^{n+1}}{1+t}$ dont on peut calculer la limite puisque $|t| < 1$).
   - Invoquer un développement limité est par contre grossièrement faux. Rappelons qu'un DL donne des renseignements localement (en l'occurence ici au voisinage de 0) tandis qu'un DSE donne des renseignements globaux (en l'occurence ici sur $\mathring{D}(0,1)$).
   - Le théorème de la convergence dominée imposé par l'énoncé n'est maîtrisé que dans une (très) petite moitié des copies. Pire, ses hypothèses ne sont pas sues pour un bon quart d'entre elles. Les erreurs les plus fréquentes sont une incompréhension totale de la notion de fonction dominatrice (on a vu un grand nombre de fonctions de domination dépendant de n, comme $f(x) = n$, ce qui est une erreur de logique très importante), ou alors de mauvaises majorations, ou mal justifiées. Une erreur assez fréquente a été d'écrire :

   $$\left|\sum_{k=0}^{n}(-t)^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} t^k \leqslant \frac{1}{1-t}$$

   mais $t \longmapsto \frac{1}{1-t}$ n'est pas intégrable sur $[0,1[$.

3. – Beaucoup de majorations où manquent les valeurs absolues, ce qui ne permet pas de conclure.
   – Vu énormément de fois, des majorations de $\|\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}\|_\infty$ qui dépendent de x !
   – Il faut invoquer le théorème de la double-limite.

4. (a) L'étude de fonction est en général bien menée. Par contre, ne pas oublier qu'un rang, ou indice, d'une suite est un entier. On ne dit pas que la suite est décroissante à partir du rang $\mathrm{e}^{1/x}$. Par contre elle le sera à partir d'un entier supérieur, par exemple $E(\mathrm{e}^{1/x})+1$ (le $+1$ a souvent été oublié).

   (b) Une question peu réussie.
   – Tout d'abord, parfois des erreurs de dérivation du type $(n^x)' = xn^{x-1}$.
   – Très peu de candidats ont vu qu'il fallait trouver un rang à partir duquel TOUTES les f_n' décroissaient.
   – Beaucoup de manipulations de valeurs absolues vraiment hasardeuses, du type :
   $$\left|\frac{(-1)^n \ln n}{n^x}\right| \leqslant \frac{(-1)^n \ln n}{n^a}$$
   – Vu aussi très souvent : $\left|\frac{(-1)^n \ln n}{n^x}\right| \leqslant \frac{\ln n}{n^a}$ qui est le terme général d'une série convergente, ce qui est faux si $a \leqslant 1$.
   – Lors de l'invocation du théorème de dérivation des séries, l'hypothèse « $\sum f_n$ converge simplement » a été très souvent oubliée, ou remplacée par l'hypothèse beaucoup trop forte (le théorème demande juste qu'existe a tel que $\sum f_n(a)$ converge) de convergence uniforme.

5. Parfois la limite de $1 - 2^{1-x}$ n'est pas justifiée.

6. (a) Question de cours : le produit de deux séries absolument convergente est absolument convergent.

   (b) – Beaucoup de minorations de $k(n-k)$ exotiques. On attendait peu de justifications (par exemple que $k \mapsto k(n-k)$ est du second degré en k et admet son extremum au milieu des racines). Certains ont utilisé l'inégalité arithmético-géométrique, ce qui est très bien.
   – Une erreur vue très souvent dans la conclusion : on minore $\sum |c_n(x)|$ par une série divergente. Ca prouve que $\sum c_n(x)$ ne converge pas absolûment, mais pas qu'elle diverge. Par contre, le fait que $c_n(x)$ ne tende pas vers 0 lève toute ambiguité.

7. (a) La DES a été généralement bien faite. La simplification de la somme a échoué de deux façons :
   – soit le candidat n'a pas fait attention que $x = 1$
   – soit le candidat n'a pas vu que $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n-k} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = H_{n-1}$.

   (b) Réussie assez souvent.

   (c) Cette question demandait une certaine initiative au candidat où il devait utiliser que $H_n \sim \ln n$, résultat classique mais il est vrai pas un résultat de cours (on pouvait aussi s'en sortir avec le théorème de Cesáro).

2. Calcul de la somme à l'aide d'une étude de zeta au voisinage de 1

8. (a) – Beaucoup de DL faux tout simplement parce que le candidat ne sait pas que, dans un DL en 1, l'inifiniment petit est $(x-1)$. Dans le même ordre d'idée, même si la partie principale du DL est juste, souvent le reste a été écrit $o(x)$ au lieu de $o(x-1)$.
   – Beaucoup de candidats ont fait un DL à l'ordre 1 de $1-2^{1-x}$, malgré ce que dit l'énoncé.

   (b) – La grosse erreur, obtenue de plusieurs façons dont la plus fréquente consiste à « oublier » le terme en $(x-1)^2$ du DL de $1-2^{1-x}$, a été de ne pas développer le dénominateur. On se retrouve alors avec $b = \frac{F'(1)}{\ln 2}$.

9. (a) – La grosse erreur a été de tenter un calcul direct de l'intégrale puis un encadrement du résultat, qui n'aboutit pas.
   – La décroissance de $t \longmapsto \frac{1}{t^x}$ doit être évoquée.

   (b) Beaucoup d'imprécisions ici :
   – Il faut absolument préciser que la série est à termes positifs.
   – Certains candidats ont utilisé un critère de comparaison ($\sum v_n(x)$ majorée par une série convergente), qui ne dispense pas de la positivité des termes de la série !
   – Beaucoup de majorations du type :

   $$\sum_{n=1}^{N} v_n(x) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^x} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{(n+1)^x}$$

   Mais la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}$ ne converge pas si $x = 1$.

   (c) En général réussie, même si parfois mal justifiée.

   (d) Question délicate très mal et peu traitée. Bien sûr, la majoration indépendante de x a été rarement faite.

   (e) Question de synthèse. La continuité de la somme, qui passe par CU, était attendue. Ou alors le théorème de la double-limite (ce qui revient au même). Toute autre justification n'était pas recevable (notamment « la série CU donc admet un DL_1 »).

10. Si toutes les réponses précédentes étaient bonnes, en général cette question était bien traitée. Sinon, ça pêche soit par le raisonnement (surtout si la question précédente n'était pas faite), soit par le résultat.

3. Calcul des $F(2k)$ à l'aide des nombres de Bernoulli

11. Question facile bien traitée dans l'ensemble. L'erreur la plus fréquente a été de placer du n dans les formules.

12. Rien à signaler.

13. Beaucoup d'élèves ont essayé de résoudre cette question par récurrence. C'est possible, en dérivant l'égalité pour pouvoir utiliser l'hypothèse de récurrence. Attention cependant à la constante d'intégration. Trois grandes attitudes :
   – On l'escamote purement et simplement

- On se rend compte qu'il faudrait un raisonnement sur la parité de n : ça marche bien dans un cas, ça marche mal dans l'autre. Encore une fois, soit on escamote ce cas, soit on avoue son incapacité à conclure.
- Ce qui marchait, c'était d'intégrer la relation obtenue.

14. Fausse question facile, bâclée assez souvent :
    - Le théorème de convergence simple est souvent mal énoncé, ou mélangé avec celui de la convergence normale.
    - La continuité de g_k doit être justifiée. Beaucoup de candidats ont écrit : « g_k est polynomiale », ce qui est faux.
    - Partis sur leur lancée, les mêmes candidats ont cru bon d'ajouter que g_k était $\mathcal{C}^\infty$, ce qui est tout aussi faux !
    - La parité de g_k, indispensable pour éliminer les termes en sinus, doit être justifiée, elle n'est pas évidente.
    - À noter que l'unicité demandée aurait dû être admise par l'énoncé (unicité de l'écriture d'une fonction continue comme limite simple de polynômes trigonométriques). Mais au vue des copies, cela n'a pas été dommageable pour les candidats.
15. (a) Quand la question est traitée, elle est en général réussie. Quelques maladresses, comme un changement de variable au début qui n'est pas indispensable.

    (b) La fatigue se fait ressentir et d'assez nombreuses erreurs bêtes :
    - $B_1(1) - B_1(0) \neq 0$, la relation de la question 12. n'étant valable que si $n \geqslant 2$.
    - Est-ce lié à l'erreur précédente ? Beaucoup trouvent $a_n(0) = 1$, ce qui leur permet de trouver des formules assez proches de celles demandées aux questions suivantes.
    - Une proportion non négligeable de candidats ayant traité la question n'a même pas cherché à calculer $a_n(0)$.

    (c) La façon propre de la rédiger était une récurrence, néanmoins on acceptait une rédaction « par petits points ». Certains candidats en ont quand même profité pour essayer de camoufler leurs erreurs de calcul à la question précédente.
16. Pas de problèmes majeurs, si ce n'est qu'il faut calculer $a_0(k)$, ce qui a été parfois oublié, plus souvent le résultat était donné sans calcul.
17. (a)
    - Souvent, c'est la formule de Taylor à Reste Intégral qui a été utilisée, ce qui est un peu maladroit.
    - On attendait quand même une petite justification au fait que $B_n^{(k)}(X) = n(n-1)\cdots(n-k+1)B_{n-k}(X)$, pour ne pas avoir l'impression que le candidat a juste recopié ce qu'il manquait pour faire apparaître un $\binom{n}{k}$.

    (b) Question très peu traitée. Parmi ceux qui l'ont fait, certains n'ont pas vu qu'écrire $b_n = B_n(1) = B_n(0)$ ne permettait pas de calculer b_n mais b_{n-1}. À signaler, certains candidats ont intégré la formule précédente entre 0 et 1, ce qui donne une autre formule de récurrence, équivalente moyennant une petite transformation sur les coefficients binomiaux. L'algorithme lorsqu'il est traité est écrit de manière à peu près cohérente, en général en langage MAPLE.