Dans cette épreuve, on se proposait dans un premier temps d'établir, pour tout entier naturel n, l'égalité entre β_n l'entier naturel le plus proche de $e^{-1}n!$ et γ_n le nombre d'éléments sans point fixe du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ (avec la convention $\gamma_0 = 1$) ; dans un deuxième temps on étudiait l'écart $\delta_n = e^{-1}n! - \beta_n$.

La partie I était consacrée à l'étude β_n que l'on caractérisait grâce à une relation de récurrence ; l'étude de γ_n et de son lien avec β_n était l'objet de la partie II.

Enfin dans la partie III on étudiait les séries $\sum_{n\geq 0} \delta_n$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{|\delta_n|}{n}$.

L'épreuve recouvrait plusieurs secteurs du programme avec des questions assez classiques et quelques questions de réflexion en particulier dans la partie II.

L'indépendance des parties II et III permettait aux candidats d'aborder la dernière partie malgré un insuccès dans l'étude de γ_n.

Les trois parties ont été abordées très largement.

PARTIE I

L'objectif de cette partie était de caractériser l'entier β_n par une relation de récurrence puis d'établir l'égalité $\beta_n = f^{(n)}(0)$ où f désignait la solution d'un problème de Cauchy.

Les questions I.1 (étude de la suite α) et I.2 (étude de la suite β) permettent d'apprécier le flou de certaines connaissances de base des candidats et de constater le manque de réflexion apportée à la résolution des questions posées :

- on apprend par exemple que « $(-1)^n \in \mathbb{N}$ » ou que « $\frac{(-1)^k}{k!} \in \mathbb{Z}$ » ;
- pour montrer par récurrence que « pour tout $n \in \mathbb{N} : \alpha_n \in \mathbb{N}$ » l'argument se ramène très souvent à « $\alpha_0 = 1 \in \mathbb{N}$ et si $\alpha_n \in \mathbb{N}$ alors $\alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1}$ donc $\alpha_{n+1} \in \mathbb{N}$ »
- devant la relation $\alpha_{n+1} = (n+1)\alpha_n + (-1)^{n+1}$ de nombreux candidats ne semblent pas imaginer que α_n puisse être nul (malgré le calcul de α_1) ou bien que $(-1)^{n+1}$ puisse être négatif !

Le théorème des séries alternées énoncé complètement fournissait une réponse tout à fait correcte pour I.3.1 et permettait d'obtenir l'inégalité large dans I.3.2 mais tous les correcteurs ont vu pour I.3.2 l'argument « $|\rho_n| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!}$ d'où le résultat souhaité ».

Les candidats ont estimé que l'inégalité était stricte mais la justification de cette affirmation a presque toujours été absente.
Concernant les questions I.4 (étude d'une fonction), il faut signaler :

- que l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy sont connues par la majorité des candidats,

- que de chercher la fonction f sous forme de somme d'une série entière est un procédé bien lourd pour une équation différentielle linéaire du premier ordre,

- qu'un petit instant de réflexion devrait aider à trouver une primitive de $\frac{x}{1-x}$.

PARTIE II

L'objectif de cette partie était d'obtenir l'égalité entre β_n et γ_n grâce à l'unicité du développement en série entière de deux fonctions f et g.

Le début de cette partie et cela jusqu'à la démonstration de la relation $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \gamma_k = n!$ demandait une connaissance minimum du groupe symétrique $\mathcal{S}_n$ et de la réflexion.
En dehors des candidats consciencieux et méthodiques qui ont bien abordés cette partie, il faut remarquer ceux qui sont passés directement à la suite (II.5) plus classique, et ceux qui ont donné des réponses tout à fait fantaisistes aussi bien concernant $\mathcal{S}_3$ et $\mathcal{S}_4$ qu'au sujet du nombre d'éléments de $\mathcal{S}_n$ (par exemple $n^2, 2^n$ ou $\frac{n(n+1)}{2}$).
Ce début de partie s'est révélé très sélectif sur la capacité des candidats à comprendre une définition (celle de γ_n) et sur l'aptitude à réfléchir pour utiliser une notion nouvelle dans le cas général comme des questions II.4.2 et II.4.3.
La relation utile pour la suite étant donnée en II.4.3 tous les candidats pouvaient aborder la fin de la partie II.
Concernant les questions II.5 signalons les automatismes mal adaptés de beaucoup de candidats :

- l'utilisation systématique du critère de d'Alembert pour la recherche du rayon de convergence d'une série entière

- le réflexe de tenter de prouver que toute série alternée est convergente (par exemple $\sum (-1)^n \frac{\gamma_n}{n!}$ alors que $\frac{\gamma_n}{n!}$ ne tend pas vers zéro).

PARTIE III

Dans cette partie on étudiait les séries $\sum \delta_n$ et $\sum \frac{|\delta_n|}{n}$.

De nombreuses remarques concernent les questions III.1 (la série $\sum_{n\geq 0} \gamma_n$).

La plupart des candidats voient que J_n tend vers zéro mais leurs justifications ne sont pas toujours acceptables ; par exemple « J_n tend vers 0 car $x^n e^x$ tend vers 0 uniformément sur $[0,1]$ (ou souvent car la convergence est uniforme sur $[0,a]$, $\forall a \in [0,1[$).

A noter un résultat curieux, vu plusieurs fois : « $J_n = \int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x$ tend vers 0 si $x \in [0,1[$ et tend vers e si $x = 1$ ».

Pour obtenir la convergence de la série $\sum \gamma_n$ les candidats invoquent le théorème des séries alternées mais souvent ils affirment sans justification que J_n est décroissante.
Les questions III.2 ont été traitées très correctement, même dans des copies faibles sur d'autres secteurs : la formule de Taylor avec reste intégral est bien assimilée et le calcul qui conduit à $\delta_n = e^{-1}\gamma_n$ est souvent mené à son terme.
La convergence de $\sum \delta_n$ (question III.3) est souvent établie correctement, ce qui n'est pas le cas pour la divergence de $\sum |\delta_n|$.
A noter l'argument : « comme $\delta_n = e^{-1}\gamma_n$ il en résulte que $\delta_n = O(\gamma_n)$
donc $\sum \gamma_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum \delta_n$ converge ».

Le début des questions III.3 (sur les séries $\sum \frac{|\delta_n|}{n}$) a été assez largement abordé avec plusieurs idées conduisant à la convergence de la série $\sum \frac{|\delta_n|}{n}$.
La question III.4.2.1 (convergence de l'intégrale impropre A) a été très mal traitée :

- ou bien l'analyse était insuffisante avec une étude uniquement à la borne 0,
- ou bien avec des arguments « singuliers » du type : « il y a convergence en 1 car $\ln(1-x) \sim -x$ ».

Enfin si dans III.4.2.2 le calcul est mené à son terme, la justification est souvent très incomplète et si dans III.4.3 la convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{n!(n+1)^2}$ est obtenue, la fin du problème n'a concerné que quelques rares brillants candidats.

Nous souhaiterions que les candidats qui dans l'ensemble ont les connaissances et l'aisance technique pour résoudre de nombreuses questions classiques se mettent d'avantage en valeur grâce à un peu plus de réflexion.