## Observations générales

Le sujet débutait par un exercice d'application directe du cours sur la recherche d'extrema d'une fonction de 2 variables. Ensuite, il était proposé au candidat un problème sur les divers cas de permutation entre limite et intégrale.

Ce sujet couvrait une très grande partie du programme d'analyse de l'année, et comportait un certain nombre de questions de cours, souvent assez simples et des questions proches du cours. Il favorisait ainsi l'étudiant sérieux et travailleur. Par ailleurs, il variait les approches : démonstrations, exemples, contre-exemples, applications, simples rappels. Ainsi, il permettait de juger si le candidat avait compris les différentes notions du programme tout en lui laissant une certaine initiative.

Ce sujet a permis d'étaler les performances des candidats parmi lesquelles on distingue :

- Les performances très satisfaisantes traitant avec succès l'ensemble du sujet.
- Les performances honorables des candidats moyens mais sérieux et travailleurs.
- Les performances pauvres, très inquiétantes parfois après deux années de CPGE. En particulier, les notions de convergence uniforme sont très mal maîtrisées.

En résumé, c'est un sujet qui a joué son rôle et permis de bien classer les candidats.

## Un certain manque de rigueur

On notera un manque de rigueur parfois assez important.

- On oublie de vérifier les hypothèses des théorèmes utilisés.
- On ne cite pas le théorème utilisé et par moment le correcteur a du mal à deviner quel est ce théorème.
- On utilise un théorème pour prouver ce théorème.
- Lorsqu'un calcul est mené, le ou les cas particuliers sont assez souvent oubliés.
- Un manque de rigueur aussi dans l'écriture, on voit souvent : $g(t)$ continue, $f$ intégrable « en 0 », $g(t)$ intégrable, $\|f(x)\|_\infty$,...

Par ailleurs, certains étudiants lisent mal l'énoncé et perdent un temps précieux en redémontrant des résultats rappelés par le texte ou encore en redémontrant un résultat déjà obtenu plus haut dans le sujet.

## Erreurs les plus fréquentes

- La frontière d'un carré est trop souvent réduite aux 4 sommets.
- On utilise la réciproque, pourtant fausse, du théorème de d'Alembert : si $\sum a_n$ converge alors $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to l > 1$ !
- Confusion entre théorème de Parseval et théorème de convergence d'une série de Fourier.
- $f(x) \to 0$ en $+\infty$ donc $f$ intégrable au voisinage de $+\infty$.

## Remarques détaillées par question

### EXERCICE

**a.** On attendait ici : toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.
Beaucoup de confusions entre fermé et compact.
On confond continuité et continuité des applications partielles.

**b.** Le rapport entre point critique et extrema n'est pas toujours clair. On ne comprend pas toujours l'intérêt de travailler sur l'ouvert puis sur la frontière… à méditer.

**c.** La frontière d'un carré est trop souvent réduite aux 4 sommets !

### PROBLEME

**1.** On attend que le candidat précise que la fonction $t \mapsto e^{-t}\, t^{x-1}$ est continue sur l'intervalle $\left]0, +\infty\right[$ et qu'il précise que cette fonction est positive pour pouvoir utiliser les règles d'intégrabilité.
La relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$ et la valeur de $\Gamma(n)$ ne sont pas toujours connues… bizarre.

**2.** L'inégalité classique $R_n(x) \leq \dfrac{1}{(x-1)n^{x-1}}$ est trop peu démontrée. On essaye parfois une récurrence alors que la comparaison série-intégrale est une meilleure idée.

**3.** Question assez bien traitée. Toutefois pour ceux qui choisissent de passer par les quantificateurs, le $\forall x \in [a, b]$ est très souvent mal placé !

**4.** De bonnes idées pour cette question, même si on voit des exemples qui ne convergent pas simplement ou encore des fonctions qui ne sont pas continues.

**5.** Les candidats ont voulu utiliser la formule de Stirling pour prouver la convergence simple alors que cette formule permettait de donner un équivalent de $\|f_n\|_\infty$ obtenu à l'aide d'un tableau de variation. On précise que cette formule de Stirling donne un équivalent et n'est pas une égalité.

**6.** On trouve souvent l'erreur : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin\frac{x}{n}}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = e\frac{\pi}{2}$ à la place de $\dfrac{\pi}{2}$ ou encore : $\dfrac{e^{\sin\frac{x}{n}}}{1+x^2} \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ !

**7.** Question bien traitée.

**8.** Trop peu d'étudiants savent énoncer la formule de Parseval.
Cette question est une application de la précédente, on attendait donc (pour la question b.) une interversion $\sum$ - $\int$ bien justifiée.

**9.** On rencontre des réponses qui n'utilisent jamais l'absolue convergence de la série. On rappelle que toute hypothèse doit être utilisée. On voit aussi le théorème de d'Alembert qui n'était pas utile ici.

**10.** Pour beaucoup, une série entière converge uniformément sur son intervalle ouvert de convergence ; ceci a donc perturbé les candidats pour la question a. !
Un candidat doit connaître des techniques pour prouver la non convergence uniforme pour une série de fonctions.
Pour la question c. trop peu d'étudiants pensent à une somme géométrique. On attend une justification de la formule $\sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \ln 2$.

**11.** Question assez bien traitée. Toutefois, là encore les hypothèses de la question ne sont pas toutes utilisées, en particulier la positivité des fonctions $f_n$.

**12.** Question assez bien traitée pour les candidats qui ont eu le temps d'arriver jusqu'ici.

**13.** Question assez bien traitée.

La moyenne de l'épreuve est de **9,59** et l'écart type est de 4,16.