MATHÉMATIQUES II

Monsieur Christian DUPUIS

Le problème portait sur l'étude de matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, possédant des propriétés particulières liées à la théorie des graphes.

L'épreuve était de difficulté progressive avec parfois un enchaînement de questions faciles, destinées à fournir à tous les étudiants les résultats essentiels à la poursuite du problème ; quelques questions étaient simplement des questions de cours (II.3.1 et III.2).

Après une première partie traitant d'un exemple, la deuxième partie qui constitue le cœur d'un problème, est suivie d'une construction d'une matrice du type étudié.

La plupart des copies traitent les trois parties avec des réussites diverses bien sûr. On peut noter que les définitions *a priori* difficiles de la partie II n'ont pas rebuté les étudiants. La majorité d'entre eux ont abordé la partie III, dont certaines questions sont faciles, ce qui témoigne d'une approche pragmatique et efficace d'un sujet de concours.
Beaucoup de candidats font d'ailleurs preuve d'une bonne intuition, devinant la bonne réponse sans pour autant maîtriser complètement le sujet.

L'éventail de réussite des copies est très large, depuis la copie quasiment vide, heureusement assez rare jusqu'à celle presque parfaite.

Rappelons aux candidats qu'ils rédigent des exposés dont le but est d'être lus ; le correcteur doit être persuadé que l'étudiant a compris le raisonnement et les calculs. Même une question de calcul simple nécessite une courte phrase d'explication.
Signalons à ce propos que la calculatrice étant autorisée, certaines réponses peuvent découler de son utilisation, la justification étant alors de préciser que c'est par ce moyen qu'elles sont obtenues.

La première partie du problème est calculatoire et traite un cas particulier de matrice carrée d'ordre 5 vérifiant la propriété (P) définie au début de la partie suivante. Il s'agit, sur cet exemple, de faire établir des résultats qui seront démontrés de façon générale dans la partie II.

Les questions très abordables, permettaient aux étudiants de faire état de leurs connaissances et de leur aptitude au calcul sur des matrices carrées d'ordre 5 : recherche d'un polynôme annulateur, valeurs propres possibles et détermination d'un sous-espace propre.

Rappelons que la résolution d'un système linéaire demande de raisonner par équivalence avec une méthode simple, efficace et rigoureuse comme par exemple la méthode du pivot de Gauss, et qu'à défaut une réciproque est indispensable.
Certains étudiants, parfois capables de progresser loin dans le sujet, sont en difficulté sur ce genre d'exercice. Enfin -3, une des valeurs propres possibles, est un entier, bien qu'il ne soit qu'un entier relatif.

Dans la partie II, qui constitue le centre du problème, on définit une propriété $(\mathcal{P})$ qui caractérise les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ étudiées et qui fait intervenir un entier naturel δ.

La question II.1 dont le but est d'arriver à la relation $M^2 = J_n - M + (\delta - 1) I_n$ est correctement traitée, avec souvent peu ou pas de justification. L'utilisation de cette égalité est suggérée dans la question II.2, sous la forme du calcul de $(f \circ f)(u)$, où f est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice M. Dans cette question, on montre que δ est une valeur propre de f, on détermine le sous-espace propre associé et on justifie l'égalité $n = \delta^2 + 1$. Les réponses donnent lieu à beaucoup d'approximations : on peut lire $\mathrm{Im}(\varphi) = v$ ou αv, au lieu de Vect (v).
La partie centrale de la question conduit souvent, de façon inquiétante, à de belles erreurs logiques : si la question II.2.2 fait établir une condition nécessaire sur les vecteurs propres de f, la question II.2.3 conduit à montrer que cette condition est suffisante.
Un très grand nombre d'étudiants semble être dans la confusion sur ce type de raisonnement et affirme que puisque tout vecteur de $\ker(f - \delta id)$ est colinéaire au vecteur v alors δ est valeur propre de f et que le sous-espace propre associé est Vect (v), sans autre justification.
Enfin un nombre assez élevé de candidats affirme que l'égalité $n = \delta^2 + 1$ s'obtient à partir du théorème du rang appliqué à l'endomorphisme $f - \delta id$, puisque la dimension de $\ker(f - \delta id)$ est 1. Encore faudrait-il montrer que le rang de cette application est δ^2, ce qui ne doit pas être simple par une démonstration directe.

La question II.3 conduit à déterminer les deux autres valeurs propres de f, a et b.
La majorité des étudiants savent que la matrice M est diagonalisable car symétrique mais oublient de dire qu'elle est à coefficients réels. En II.3.2, l'égalité $\sum x_i = 0$ est souvent admise, pour en déduire de façon correcte que $\varphi(u) = 0$. A la fin de cette question, beaucoup de candidats écrivent que la trace de f est la somme de ses valeurs propres, en oubliant de multiplier chacune d'elles par son ordre de multiplicité ce qui empêche d'aboutir à la conclusion demandée.

II.4 est une question de calcul et la partie II se termine par les questions II.5 et II.6, portant sur la réduction de la matrice M selon que $a - b$ est irrationnel ou rationnel. Ces trois questions contribuent à faire la différence entre les candidats. Certains d'entre eux, qui savent exprimer correctement $(a-b)^2$ et le produit matriciel demandé en II.4 achèvent en général la question II.5.
L'expression de $(a-b)^2$ peut se déduire des égalités $a + b = -1$ et $ab = 1 - \delta$, la somme et le produit des racines de l'équation du second degré (E) de II.3.3. Signalons que $(a-b)^2 = 1 - 4(1-\delta)$ n'est pas un calcul achevé et qu'il faut donner $4\delta - 3$ pour obtenir le total des points attachés à cette réponse.

Peu de candidats abordent la question II.6 dont le début utilise l'arithmétique de la classe de PCSI ; cette partie du programme semble très mal maîtrisée. Quelques étudiants donnent le tableau des valeurs demandées en II.6.4 parfois de façon incomplète mais avec assez peu d'erreurs de calcul.

La partie III est abordée par beaucoup de candidats même ceux qui s'arrêtent au milieu de la partie II.

Les questions III.1 et III.3 sont faciles. Pour la première question, à ce niveau d'études, on préfère le raisonnement à l'énumération et l'on souhaite lire qu'il y a $\binom{5}{2}$ façons de choisir 2 entiers parmi 5 plutôt que l'expression explicite des 10 vecteurs u_i possibles. Dans la question III.3, on est surpris de lire des résultats inachevés : e_α^2 ou $\left(e_\alpha \middle| e_\beta\right)$ alors que $B=\left(e_i\right)$ est une base orthonormale.

La question III.2 est très mal traitée. On aurait aimé lire que, puisque ψ est un endomorphisme qui transforme la base orthonormale B en elle-même, alors ψ est une transformation orthogonale et que donc elle conserve le produit scalaire (c'est du cours). Au lieu de cela on lit : $\psi B = B$ entraîne que pour tout $e_i \in B$ on a $\psi\left(e_i\right)=e_i$ (Donc ψ = id, ce qu'ils n'osent pas écrire, pressentant sans doute que c'est trop simple). Bien sûr si ce raisonnement était juste, la conservation du produit scalaire en découlerait facilement !

La question III.4 est souvent abordée avec bonheur. Les étudiants trouvent en général l'expression attendue par la matrice M et montrent les premières conditions de la propriété $\left(\mathcal{P}\right)$. La dernière condition est plus difficile à vérifier et nécessite une réciproque.

Terminons ce rapport par quelques recommandations destinées à ne pas perdre de point sur les parties traitées :

- Citer de façon précise les théorèmes utilisés ; cela permet de ne pas oublier d'hypothèse.

- Accompagner chaque résultat, même simple, d'une phrase de justification.

- Donner des résultats achevés : polynômes ordonnés ou factorisés, expressions simplifiées au maximum.

- Faire ressortir les résultats en les soulignant ou en les encadrant. Cette impérative nécessité permet au candidat de les retrouver facilement pour les questions suivantes et au correcteur de les repérer dans l'enchaînement des questions.