Composition de Mathématiques 2, Filière MP

Rapport de MM. Vincent COSSART et Jean-Luc SAUVAGEOT, correcteurs.

Cette épreuve a été bien réussie. Une dizaine de candidats ont tout fait correctement et ont obtenu la note 20. Un candidat exceptionnel a même proposé plusieurs solutions aux questions **6.** et **7.**. Les correcteurs le félicitent mais déconseillent cette pratique : au cas où deux solutions sont proposées pour une question, l'une juste, l'autre fausse, on **risque de ne tenir compte que de la fausse**.

Ce problème proposait un tout petit nombre de questions difficiles, que seule une poignée de candidats a abordées, quelques questions un peu moins difficiles, où s'est jouée la sélection entre les meilleures notes et les autres, et enfin des questions faciles ou de difficulté standard qui ont été vues par trop de candidats comme autant d'obstacles sévères.

Ce problème était court, le barême était sur 20 et non sur 22 ou 25 comme les années précédentes : les candidats qui ont négligé les faciles premières questions ont perdu stupidement des points qu'ils n'ont jamais pu compenser par la suite.

Les notes des candidats français se répartissent selon le tableau suivant :

$0 \leqslant N < 4$	43	3,0%
$4 \leqslant N < 8$	340	23,3%
$8 \leqslant N < 12$	613	42,1%
$12 \leqslant N < 16$	349	24,0%
$16 \leqslant N \leqslant 20$	112	7,7%
Total	1457	100 %
Nombre de copies : 1457		
Note moyenne : 10,23		
Écart-type : 3,66		

Passons à l'examen détaillé des questions.

1. L'existence : $A_s = \dfrac{A + {}^tA}{2}$, $A_a = \dfrac{A - {}^tA}{2}$ fut une formalité, l'unicité fut un calvaire ou passée sous silence chez beaucoup.

2. La difficulté était de voir que A est s-positive si et seulement si A_s est s-positive. Certains ont supposé $A = A_s$, ce qui simplifiait tout.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

3. Il suffisait de remarquer que $(x|(\lambda I+A)x) \geq \lambda ||x||^2$. Beaucoup ont voulu passer par la diagonalisation de A_s, sans succès.

4.a.b En général bien traitées, beaucoup trop d'oublis ou d'erreurs de calcul.

5.a.b. Bien traitées par plus de 90% des candidats.

6. Cette question a été largement abordée et très mal réussie. Plusieurs méthodes, la plus simple étant de remarquer que

$$\sup_{x\neq 0}\frac{||R_\lambda(A)x||}{||x||} = \frac{1}{\inf_{y\neq 0}\frac{||(\lambda Id+A)y||}{||y||}}$$

et de montrer que $\inf_{y\neq 0}\frac{||(\lambda Id+A)y||}{||y||} \geq \lambda$.

7.a.b.c. Tous les candidats ou presque, en particulier ceux qui ont saccagé la question **6**, se lancent avec soulagement dans cette question. **7.a** fut une formalité, mais la moitié des candidats n'a pas su faire **7.b.c.** qui semblaient bien simples. Dans **7.c.**, le type de convergence n'était pas explicitement exigée : beaucoup se sont limités à la convergence simple.

8. La moitié des candidats n'a pas su montrer que Φ est indéfiniment dérivable, alors qu'il suffisait de remarquer que Φ est dérivable, avec $\Phi'(\lambda) = -\Phi(\lambda)^2$, puis de continuer par récurrence. Quelques uns ont remarqué que les coefficients de $R_\lambda(A)$ sont des fractions rationnelles en λ dont les pôles sont ≤ 0 par **3.**, mais ensuite ils ont dû faire la récurrence précédente.

9. Quelques uns ont comparé les noyaux des $F(\lambda)$ en utilisant (III.ii), les autres ont vu que $F(\lambda)(Id+(\lambda-1)F(1)) = F(1)$ puis ... certains ont désespérément cherché à montrer que $Id+(\lambda-1)F(1)$ était inversible, par exemple en essayant de passer de λ à $\lambda+1$, puis en regardant $\lambda \leq 1$: ils furent rarement heureux.

10.a. Sans difficulté.

10.b. Il suffisait de faire tendre λ vers 0 dans la relation précédente.

11. Pour $AF(\lambda)$, c'était facile, pour A, ce fut **la difficulté de l'épreuve**, fort peu y sont arrivés.

12. La plupart des candidats qui ont entamé la question ont su écrire

$$\frac{d}{dt}||\exp(-tA)x||^2 = -2\Big(A\exp(-tA)x\Big|\exp(-tA)x\Big)\,.$$

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr

Ils en ont déduit (i)⇒(ii)⇒(iii). La réciproque fut rarement faite. Certains malheureux ont voulu comparer $\exp(-tA)$ et $\exp(-tA_s)$, en admettant plus ou moins explicitement que A et A_s commutaient. Cela simplifiait les choses...

13. Bien faite par ceux qui sont venus jusque là.

14. Bien faite formellement, mais peu ont justifié une intégration par parties qui faisait apparaître des limites aux bornes d'intégration.

15. Ici aussi, peu ont justifié les convergences (faciles certes) des séries. Les correcteurs ont tout vu : des calculs extravagants pour retrouver **4.** par tous les moyens ou des justifications sidérantes pour affirmer que le résultat trouvé (parfois à coefficients imaginaires) était égal à celui de **4.**.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr