MATHÉMATIQUES II

Monsieur Christian DUPUIS

Le problème portait sur l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^2$ muni du produit scalaire habituel. Il conduisait, à travers différents sous-ensembles de matrices de $M_2(\mathbb{C})$, à définir un produit scalaire réel sur l'un d'eux et à étudier des rotations sur cet espace euclidien de dimension 3.

La présentation des copies est généralement satisfaisante, mais la rédaction est trop souvent négligée. Les points simples et usuels sont peu détaillés, comme par exemple la transposée ou l'inverse d'un produit de matrices, la dimension d'un sous-espace vectoriel, la diagonalisation, la linéarité… Les étudiants répondent assez souvent dans l'esprit de la question mais pas à la question : Par exemple vecteur propre et non sous-espace propre.

Pour un trop grand nombre de candidats, on constate un manque de maîtrise du calcul élémentaire sur les nombres complexes.

Le niveau des copies était très variable, les questions les plus difficiles comme II.4 et IV.4 étant traitées par un nombre raisonnable de candidats, certains étudiants abordant avec succès et finesse la quasi-totalité de l'épreuve.

En prenant le problème dans l'ordre chronologique, on peut faire les remarques et commentaires suivants :

La première partie était une introduction au produit scalaire sur $\mathbb{C}^2$, destinée à évaluer les connaissances élémentaires des étudiants. Elle se terminait par une recherche de vecteurs propres, utile pour la suite du problème. Cette partie a révélé des lacunes :

La question I.2 donne lieu à des calculs fastidieux, longs et souvent erronés ; cette remarque s'applique même à certains candidats qui, par ailleurs, réussissent fort bien dans le reste du problème.

Dans la question I.3, il est surprenant de constater le manque de logique suivant : après avoir trouvé deux droites de vecteurs propres pour la matrice T (question I.3.1) et « en déduire une base orthonormale de vecteurs propres » (question I.3.2), certains étudiants appliquent la méthode d'orthonormalisation de Schmidt à deux des vecteurs propres trouvés, un sur chaque droite. On est partiellement rassuré lorsqu'ils obtiennent des vecteurs colinéaires aux vecteurs propres choisis ! La méthode de Schmidt est assimilée, mais pas les conditions dans lesquelles on l'applique et que dire de la rentabilité des calculs ?

Dans la partie II, après avoir montré en II.3 que U étant un élément de $\mathcal{U}$, les matrices U^{-1} et $\overline{U}$ appartiennent à $\mathcal{U}$, la façon élégante de prouver ${}^tU$ que appartient à $\mathcal{U}$ est d'utiliser le résultat ${}^tU = \overline{U}^{-1}$ et la stabilité de $\mathcal{U}$ pour le passage à l'inverse et à la conjugaison.

Dans la dernière question II.4, plus difficile, les étudiants devinent que les valeurs propres de U doivent être de module 1 et un nombre raisonnable d'entre eux arrivent à le montrer, même si certains divisent par la norme d'un vecteur propre, sans préciser qu'elle n'est pas nulle.

Dans le début de la troisième partie, on relève beaucoup d'erreurs de calcul pour arriver de force au résultat annoncé. Des étudiants se contentent de montrer que les relations demandées $c = -\overline{b}$ et $d = \overline{a}$ conviennent.

Puis, dans la question III.2, si le polynôme caractéristique de la matrice U est souvent juste, peu de candidats arrivent à en déduire correctement les racines de la forme $e^{\pm i\theta}$; il s'agissait de montrer que les racines d'un polynôme du second degré étaient conjuguées et de module 1.

La quatrième partie était plus longue et contenait les résultats essentiels du problème. On constate un manque de précision dans les démonstrations :

- en IV.1, affirmation que (E_1, E_2, E_3) est une famille libre, puis démonstration incomplète du fait que c'est une base orthonormale de $\vee$.
- En IV.4, rédaction trop hâtive par les candidats qui ont eu l'idée de traiter cette question. On le regrette tout particulièrement car c'était un des résultats essentiels du problème et on aurait souhaité une rédaction soignée.

En IV.1.2, il était essentiel de vérifier que le produit scalaire proposé était à valeurs réelles, puisqu'il portait sur des matrices à coefficients complexes. La démonstration de la bilinéarité a souvent été malmenée. Signalons aussi la formule $\|A\|^2 = -\det(A)$, qui a troublé certains étudiants au point de les conduire à écrire $\|A\|^2 = |\det(A)|$; c'est juste mais moins précis.

Parmi les questions bien traitées lorsqu'elles sont abordées, figurent les questions IV.2, IV.3,IV.5 et IV.6.

La question IV.7 terminait le problème avec la démonstration du résultat admis en partie III. La première partie de la question a été parfois bien perçue, tandis que la deuxième partie a fait l'objet de quelques tentatives de résolution avec peu de succès.

En conclusion sur cette épreuve, on souhaite que les étudiants fassent preuve de maturité dans la rédaction des questions classiques, en évitant des vérifications fastidieuses mais en sachant dégager les raisons essentielles qui conduisent au résultat. A l'inverse, ils doivent éviter les expressions comme « il est clair, on voit que, il est évident » qui ne sont jamais des arguments lorsqu'il s'agit de justifier une réponse demandée. On souhaite également que les étudiants travaillent avec logique ; en particulier lorsqu'une question commence par « en déduire » on s'attend à ce qu'ils cherchent le lien avec les questions précédentes.