Mathématiques 1

Monsieur HARINGTON Bruno

Observations générales

Le problème proposait dans un premier temps deux exercices ; le premier demandait de calculer des intégrales doubles et le second exercice étudiait une équation différentielle linéaire du premier ordre avec raccord des solutions. Ensuite, un problème sur le théorème d'Abel pour les séries entières, permettait aux candidats d'utiliser les outils fondamentaux de l'analyse.

Cette épreuve diversifiée a permis aux candidats de faire la démonstration de leurs savoir-faire (ou de leur ignorance et de leur manque de critique…) sur de nombreux aspects du programme du concours. Il s'agissait d'une épreuve tout à fait abordable, qui nécessitait une pratique solide de l'analyse, mettant en jeu des techniques fondamentales et variées : raisonnements graphiques, recherches d'exemples et de contre-exemples, techniques de majorations, calculs, relations logiques, etc.

L'observation première de la part des correcteurs est le manque de rigueur. On utilise des théorèmes sans vérifier toutes les hypothèses, ou sans préciser quel théorème est utilisé ; l'examinateur n'est pas là pour « deviner » ce que le candidat veut dire. Ensuite, on constate beaucoup d'erreurs de calcul ou de raisonnement ou encore un manque d'esprit critique en particulier lorsque le candidat trouve des résultats peu cohérents. Les candidats ne prennent pas assez de recul sur le problème, ils doivent penser à utiliser les questions qui précèdent et aussi éviter de répondre aux questions dans un ordre aléatoire.

Les deux premiers exercices ont globalement peu inspiré les candidats. C'est dommage parce qu'ils étaient tout à fait abordables. Pour le problème, les étudiants ont, dans l'ensemble, cerné l'esprit du texte et ont pu passer en revue toutes les questions. Toutefois, les théorèmes de convergence uniforme ne sont pas maîtrisés et on note trop de flou dans les passages aux limites.

En résumé, c'est un sujet qui aura rempli son contrat en permettant de sélectionner les candidats. Les étudiants moyens et sérieux auront pu honorablement tirer leur épingle du jeu.

Remarques détaillées par question

PREMIER EXERCICE

Cet exercice a été très mal réussi.
Certains candidats calculent l'aire du triangle, d'autres pensent que le domaine est $[-1,\ 1]\times[-1,\ 1]$, ou encore utilisent des coordonnées polaires en ne tenant aucun compte de la géométrie du domaine ou de la fonction à intégrer. Le lien entre la première et deuxième question n'est pas toujours vu, la justification de $\iint_C |x+y|\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = 2\iint_T (x+y)\,\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ est incomplète : il fallait remarquer que $C=[-1,\ 1]\times[-1,\ 1]$ est symétrique par rapport à la droite d'équation $x+y=0$ mais aussi que $|-y-x|=|x+y|$.

Enfin, le plus inquiétant est le nombre de réponses incohérentes : on trouve que l'intégrale $\iint_C |x+y| \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$ est nulle ou même négative !

DEUXIEME EXERCICE

Il est surprenant de constater que la résolution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre sans second membre puisse soulever autant de difficultés.
En effet, dès la première question, les résultats sont souvent faux. Il était facile de voir que les fonctions $x \mapsto x^n$ sont solutions de (E_n) sur chacun des intervalles I et J puis que l'espace vectoriel des solutions de l'équation (E_n) sur chacun des intervalles $I = \left]-\infty, 0\right[$ et $J = \left]0, +\infty\right[$ est une droite vectorielle. En fait, on trouve très souvent la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ comme solution sur l'intervalle I ce qui complique bien les choses pour le raccord en 0 ! Aussi, trop d'étudiants laissent la réponse sous la forme $x \mapsto e^{n \ln x}$.
En ce qui concerne les problèmes de raccord, la condition de dérivabilité des solutions n'est que rarement recherchée, beaucoup se contentent de leur continuité en 0.
Enfin, peu de candidats ont une vision graphique de la deuxième question.

PROBLEME

1. Certains candidats n'ont pas remarqué que les suites vérifiant les propriétés sont associées à des séries entières de rayon 1 et, par la suite, ont cherché des exemples de séries entières de rayon infini ou $\dfrac{1}{2}$ ou autre. On dénombre beaucoup de développements en série entière usuels faux.
Très peu ont réussi la question **1d.** montrant que la convergence uniforme est très mal maîtrisée. Quelques candidats ont même pensé détecter une erreur d'énoncé affirmant « qu'une série entière de rayon 1 converge toujours uniformément sur l'intervalle $\left]-1, 1\right[$ », le contre-exemple classique est la série entière $\sum x^n$.
Il y a souvent confusion entre convergence absolue et convergence uniforme.

2. Confusion ici entre convergence absolue et convergence normale. Par ailleurs, beaucoup de candidats pensent que le fait que $|f(x)|$ soit bornée sur $\left]-1, 1\right[$ suffit à l'existence de $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$.

3. Question assez bien traitée même si on rencontre beaucoup d'erreurs de calcul. La bonne réponse était : $2\ln 2 - 1$.
Quelques candidats ont voulu utiliser le critère spécial des séries alternées, sans succès pour la question « en déduire ».

4. Question assez bien traitée même si les étudiants n'ont pas tous vu le lien entre **c.** et **d.** où il fallait, là encore, utiliser la convergence uniforme.
Par ailleurs, on rencontre ici un gros manque de rigueur, en particulier pour **a.** et **b.** où les candidats manipulent des sommes infinies comme des sommes finies.

Il convenait de faire les calculs de $\sum_{p=1}^{N}$ pour N fixé puis de faire tendre N vers $+\infty$. On rencontre aussi des erreurs du type « $\sum_{p=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2}$ » ou « $\frac{1}{1-x} \leq 1$ pour $x \in [0,\ 1[$ ».

5. Trop de réponses sans justification : il fallait ici simplement indiquer que l'on utilisait la contraposée de la question **4**.

6. On oublie souvent ici de justifier que la série $\sum \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge avant d'appliquer le théorème d'Abel. Par ailleurs, il est important de préciser le rayon d'une série entière ce qui n'est pas toujours fait pour la fonction arctan.

7. La question **a**. a posé des problèmes : par exemple, on pouvait avec $u_n = v_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{1}{4}}}$ pour $n \geq 1$, écrire : $w_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k v_{n-k} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^n \frac{1}{\left(k(n-k)\right)^{\frac{1}{4}}}$

et remarquer que $k \mapsto k(n-k)$ est maximal pour $k = \frac{n}{2}$ pour en déduire que $|w_n| \geq \frac{n-1}{\left(\frac{n}{4}\right)^{\frac{1}{4}}}$

et enfin, que $\sum w_n$ diverge grossièrement.

Peu de candidats ont pensé à utiliser le rappel : le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente qui était utile pour mener à bien la question **b**.

Ici encore, on parle de séries entières sans parler de rayon !

8. Question bien traitée, il suffisait de penser au contre-exemple de la question **1b**.

9. Question trop peu traitée. L'idée essentielle était d'utiliser le fait qu'une suite croissante majorée converge.

Certains utilisent $\sum_{0}^{\infty} u_n$ pour montrer que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge !

10. Question facile, souvent faite par le critère de d'Alembert. Toutefois, on rencontre quelques rayons négatifs !

11. Bien traitée en général. L'erreur la plus courante est de penser que Littlewood est une équivalence.

12. Question simple mais trop rarement abordée.

La réponse est : pour $x \in]-1,\ 1[$, $g(x) = \frac{1}{1-x^p} \sum_{i=1}^{p} \varepsilon_i \ x^{i-1}$.

13. Question bien traitée ; l'erreur classique est ici : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \ln 2$.

14. La CNS a été trouvée mais très rarement justifiée.

15. Question très peu abordée, il fallait trouver $\frac{4}{\sqrt{3}} \arctan \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \ln 2$.

La moyenne de l'épreuve est de 7,74 et l'écart type est de 3,73.