Mathématiques 2

Monsieur HARINGTON Bruno

Observations générales

Le problème proposait de calculer par diverses méthodes la distance d'une matrice à certaines parties de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On utilisait pour cela le théorème connu de projection orthogonale puis le théorème de décomposition polaire et le théorème de Courant et Fischer dont les démonstrations étaient proposées. Enfin, on redémontrait des résultats classiques de densité. Il couvrait une bonne partie du programme d'algèbre linéaire et d'algèbre bilinéaire avec une pincée de topologie.

L'énoncé qui se composait de 28 questions pouvait sembler relativement long, mais les candidats étaient guidés et les questions posées, claires et détaillées, nécessitaient des réponses souvent courtes. De nombreuses questions étaient de simples applications du cours. Le texte a été très bien compris des candidats, toutes les questions ont été abordées, quelques candidats ayant résolu tout le problème.

C'est un sujet qui a bien permis de classer les candidats. La moyenne de l'épreuve est de **7,97** et l'écart type est de **4,03**.

Mauvaise maîtrise du calcul…

La première partie proposait du calcul, en particulier de diagonaliser une matrice symétrique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ en demandant une matrice de passage orthogonale. La matrice était simple et le candidat pouvait avec un minimum de réflexion calculer le polynôme caractéristique en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes et ensuite trouver les sous espaces propres sans résoudre de systèmes. Cette question rapportait par ailleurs beaucoup de points, les calculatrices n'étant pas autorisées. La remarque qui revient le plus dans les rapports des correcteurs est « les étudiants ne savent plus calculer ». Cette question simple ayant été réussie par moins d'un candidat sur 5 !

On notera aussi un manque de rigueur parfois assez important. On confond condition nécessaire et suffisante, on affirme trop souvent que « c'est évident » (par exemple : $(A,B) \mapsto \mathrm{Tr}\left({}^tAB\right)$ est bilinéaire ou que ${}^tAA$ est symétrique…), on utilise les résultats que l'on demande de prouver…

Quelques conseils

Il est conseillé aux élèves de classe préparatoire de s'habituer à moins utiliser les calculatrices (celles-ci ne sont pratiquement plus acceptées dans la majorité des écrits de concours) et de faire des calculs à la main en particulier en ce qui concerne les matrices.

Il est important de commencer l'épreuve par une lecture « diagonale » du sujet, de façon à pouvoir mieux s'imprégner du texte mais aussi il est conseillé de lire les objectifs en début de sujet. En effet, on y indiquait que la partie II utilisait le théorème de projection orthogonale et certains n'ont pas utilisé ce théorème. Il est important de faire les questions dans l'ordre puisque le barème peut favoriser les questions de début de problème.

On ne peut qu'insister une nouvelle fois sur le soin que le futur ingénieur doit apporter à son travail. Par ailleurs, on précise qu'une bonne réponse peut parfois tenir en une ou deux lignes (surtout quand le sujet est long et détaillé), il est donc inutile de « remplir » sa copie et ainsi perdre un temps précieux par peur de ne pas en dire assez. Bien sûr, c'est aussi perdre son temps que de recopier l'énoncé avant chaque réponse.

Remarques détaillées par question

I. Exercice préliminaire

1. Question qui rapportait beaucoup de points. Il faut faire preuve de bon sens et apprendre à traiter cette question avec peu de calculs.
   Revoir la définition d'une matrice orthogonale, celle-ci était trop souvent écrite avec des colonnes ni orthogonales ni orthonormales.
2. Peu de bons résultats puisque là encore il y avait des calculs (donc des points à prendre) mais les étudiants n'osent pas se lancer.

II. Calcul de la distance de A à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et à $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

3. Question facile et en général réussie. Toutefois la définition complète d'un produit scalaire n'est pas toujours connue (oubli de la bilinéarité ou encore de définie positive…).
   Erreurs rencontrées : « $\mathrm{Tr}\left({}^tAA\right)=\mathrm{Tr}\left(A^2\right)$ », « $\mathrm{Tr}\left({}^tAA\right)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2$ »…
4. Question plutôt réussie.
   Erreurs rencontrées : « Une matrice est soit symétrique, soit antisymétrique », « L'intersection de deux sous-espaces vectoriels est vide »…
5. On pense à utiliser Pythagore mais on oublie parfois les carrés des normes.
6. Erreurs de calcul fréquentes.

III. Calcul de la distance de A à $O_n(\mathbb{R})$

Théorème de la décomposition polaire

7. Question de cours en général réussie si ce n'est que beaucoup croient raisonner par équivalence alors qu'ils ne montrent qu'une implication.
8. On oublie de vérifier d'abord que ${}^tAA$ est symétrique.
9. L'établissement de la base orthonormée (E_i) est parfois faux, on divise par 0 ou on introduit des vecteurs nuls dans la base !
10. On prend souvent la conclusion du b) comme hypothèse.
11. Question bilan qui est peu résolue.

Calcul de $d\left(A,O_n(\mathbb{R})\right)$

12. Question en général bien traitée.
    Erreurs rencontrées : « $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(A)\mathrm{Tr}(B)$ », « $\|AB\|=\|A\|\,\|B\|$ », « P orthogonale donc $MP=PM$ »…
13. Beaucoup recommencent ici la démonstration de la question 12 en passant par la trace alors qu'il convenait d'utiliser son résultat. On note un manque de rigueur pour établir l'égalité des distances.

14. Question guidée et assez bien traitée. Toutefois beaucoup veulent utiliser ici Cauchy-Schwarz et n'aboutissent pas.
15. Question de synthèse généralement traitée.
16. Il était plus simple ici de calculer $\|D-I\|$ que $\|\Gamma-U\|$.

IV. Calcul de la distance de A à Δ_p

17. Question classique, l'idée essentielle est présente même si on note quelques maladresses de rédaction. Toutefois on relève un nombre important d'étudiants qui ne savent pas ce qu'est la densité. Quelques candidats pensent que le polynôme caractéristique possède une infinité de racines.
18. On trouve parfois que la distance est $n-p$ alors que la réponse est 0.

V. Calcul de la distance de A à ∇_p

Théorème de Courant et Fischer

19. Question très facile.
20. Question facile.
21. On ne pense pas à la formule de Grassman ou des quatre dimensions : $\dim(A+B)=\dim A+\dim B-\dim(A\cap B)$, ou alors on confond dans cette formule $A+B$ avec $A\cup B$.
22. Question mal traitée souvent par manque de rigueur. Les notions de bornes inférieures et de minimum sont mal maîtrisées.

Calcul de $d\left(A,\nabla_p\right)$

23., 24., 25., 26., 27. et 28. : ces questions n'ont été abordées que par les meilleurs candidats.