1.2 – Epreuves écrites

1.2 B - MATHEMATIQUES I - filière PC

I) REMARQUES GENERALES

Le problème proposé avait pour but de déterminer une fonction équivalente à l'infini à la somme d'une série entière en suivant une démarche mathématique divisée en trois étapes. La première donnait un encadrement de cette somme, la deuxième en utilisant la transformée de Laplace permettait de formuler une conjecture, enfin la troisième permettait d'atteindre le résultat.

Le sujet a permis de mettre à l'épreuve la solidité des connaissances des candidats sur divers points importants du programme d'analyse : séries de fonction (séries entières, trigonométriques) ; intégration (fonctions intégrables, théorèmes de convergence, transformations intégrales). En particulier les parties I et II-1 traitées par une majorité de candidats ne demandaient qu'une bonne maîtrise technique de calculs (addition, multiplication, majoration, intégration par parties, changement de variables) et une aptitude à utiliser les définitions et les théorèmes importants du cours d'analyse (règle de d'Alembert, convexité, moyenne géométrique, fonctions intégrables, théorèmes de convergence). Les candidats ayant rédigé correctement ces deux parties, mais qui faute de temps ont dû s'arrêter, ont cependant obtenu la moyenne grâce au barème choisi, alors que ceux qui ont préféré dès la première question une stratégie de survol et de passage en force appuyée par des affirmations sans justification (du type : « c'est évident » ; « trivial » ; « question de bon sens »), ou grossièrement erronées (du type : « une série entière de rayon de convergence infini est uniformément convergente sur IR» ; « le produit de deux fonctions intégrables est intégrable») ont été pénalisés.

Nous avons obtenu un bon étalement des notes avec une moyenne proche de 8 avec cependant peu de notes supérieures à 15 (moins de 3%) et plus de 10% ayant une note finale inférieure à 4.

II) REMARQUES PARTICULIERES

Partie I

I-1) Cette question a donné lieu à une grande diversité de rédaction. On peut classer les candidats en trois catégories :

i) les premiers qui soit survolent la question, en ne justifiant pas le résultat, ou en se contentant d'affirmer « $\lim_{\mathbf{n} \to +\infty} \frac{\mathbf{x}^{2\mathbf{n}}}{(\mathbf{n}!)} = 0$ », ou bien en citant la règle de d'Alembert (certains sans doute pressés se contentent de « règle » ou de « d'Alembert »), soit se trompent en ne trouvant pas le domaine de définition de F, ou en utilisant des arguments du type : « $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}^{\mathbf{x}^2}$ » ; « $\frac{1}{(\mathbf{n}!)^2} \leq \frac{1}{(2\mathbf{n}!)}$ ».

ii) les deuxièmes entreprennent de justifier la dérivation terme à terme d'une série entière à l'intérieur de son intervalle de convergence, calculent le rayon de convergence (il y en a même parmi eux qui pour justifier la convergence de la série dérivée quand x<0 font appel au critère des séries alternées).

iii) les troisièmes, une minorité, qui citent les théorèmes et les appliquent correctement.

La caractérisation de la convexité pour une fonction $\mathbf{C}^2$ par la positivité de la dérivée seconde est parfois méconnue.

I-2) Trop d'erreurs dans le calcul de $\frac{\mathbf{v}_{\mathbf{n}+1}}{\mathbf{v}_{\mathbf{n}}}$ ou de $\mathbf{v}_{\mathbf{n}+1} - \mathbf{v}_{\mathbf{n}}$ avec des interprétations fantaisistes de (2n) ! remplacé par $2^n(n\,!)$; citons sans commentaire l'affirmation hélas non rare : « $\frac{\mathbf{v}_{\mathbf{n}+1}}{\mathbf{v}_{\mathbf{n}}}$ >0 donc la suite $(\mathbf{v}_{\mathbf{n}})_{\mathbf{n}\in\mathbf{IN}}$ est croissante ». Il est inquiétant de voir de nombreux candidats ne pas arriver à démontrer que $\dfrac{4(\mathbf{n}+1)^2}{(2\mathbf{n}+2)(2\mathbf{n}+1)} \geq 1$; la simplification de cette fraction n'étant pas toujours perçue, les plus raisonnables se lancent dans l'étude complète (dérivation, sens de variation…) de la fraction rationnelle associée, d'autres dans des développements limités ou pire encore. La définition de la moyenne géométrique n'est pas bien connue, certains candidats la confondent avec la moyenne arithmétique, d'autres utilisent des expressions du type $\sqrt{\mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2}$ ou $\sqrt{\dfrac{\mathbf{ab}}{\mathbf{a}+\mathbf{b}}}$ qui, dans le cas particulier où a=b ne restituent pas la valeur a. La formulation de la question a perturbé certains candidats qui hésitent entre donner un équivalent ou écrire des inégalités entre G et Φ à l'infini.

Partie II

II-1-a) Ce calcul simple n'a pas toujours été bien mené et il est difficile d'être indulgent envers des candidats qui donnent des résultats grossièrement faux comme $\mathbf{I_k} = -\dfrac{\mathbf{k}!}{\mathbf{x}^{\mathbf{k}+1}}$. De plus, on attendait des candidats qu'ils justifient dans un premier temps l'existence des intégrales qu'ils manipulent.

II-1-b) Cette question a été particulièrement discriminante car beaucoup de candidats ne citent pas correctement le théorème qu'ils ont utilisé ou n'en vérifient pas les hypothèses. Rappelons que citer le nom d'un théorème ne dispense pas d'une démarche mathématique, cela pour les candidats qui se rassurent en nommant simultanément plusieurs théorèmes de convergence (monotone, dominée, uniforme). L'intégrabilité de la fonction $\mathbf{t} \to \mathbf{F}(\mathbf{t})\mathbf{e}^{-\mathbf{xt}}$ pouvait se déduire soit de la majoration de la première question, soit du théorème d'interversion (mais il fallait justifier la convergence de la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\dfrac{t^{2n}}{(n!)^2}e^{-xt}dt$ pour $x < 2$).

II-1-c) Des erreurs dans le calcul du rayon de convergence de g et répétons comme l'année dernière que le développement en série entière de fonctions classiques du type $\dfrac{1}{\sqrt{1+\mathbf{u}}}$ n'est pas bien maîtrisé et rarement fait avec des coefficients écrits au moyen de factorielles.

II-1-d) Il était nécessaire d'avoir fait les questions précédentes pour aborder cette question.

II-1-e) Cette question est le plus souvent bien traitée, cependant le domaine de définition n'est pas toujours justifié et des erreurs de calcul ont pénalisé certains candidats.

II-2-a) La fonction f n'étant pas positive l'omission de la valeur absolue dans la majoration : $\forall \mathbf{x} \geq \mathbf{x}_0 \quad |\mathbf{f}(\mathbf{t})|\mathbf{e}^{-\mathbf{xt}} \leq |\mathbf{f}(\mathbf{t})|\mathbf{e}^{-\mathbf{x}_0\mathbf{t}}$ pour $\mathbf{t} \in]0,+\infty]$ a été sanctionnée.

II-2-b) Cette question a déstabilisé de nombreux candidats qui n'arrivent pas à formuler avec des quantificateurs l'expression : « I(f) est non minoré ». Pour certains il n'existe pas d'autre ensemble minoré non vide dans IR autre que IR lui-même.

II-2-c) Les rédactions correctes de la continuité sont minoritaires, la majorité des candidats ou bien affirme que : $\mathbf{t} \to \mathbf{f}(\mathbf{t})\mathbf{e}^{-\alpha(\mathbf{f})\mathbf{t}}$ est intégrable sur $]0,+\infty[$, ou bien se contente d'écrire « il suffit de prendre $\mathbf{A} > \alpha(\mathbf{f})$ » sans prendre le soin de justifier la continuité sur les intervalles de la forme $[\mathbf{A},+\infty[$. On a constaté beaucoup de dérivations sous le signe somme pour la décroissance avec soit confusion sur la variable de dérivation, soit sans justification de l'existence de $\int_0^{\infty}\mathbf{tf}(\mathbf{t})\mathbf{e}^{-\mathbf{xt}}\mathbf{dt}$. On peut à cette occasion conseiller aux candidats de préférer un effort de réflexion à une application non maîtrisée d'outils élaborés.

II-2-d) La partie i) a en général été bien traitée quand on n'oublie pas l'hypothèse g positive ce qui n'est pas le cas de la partie ii) où on a pu lire de nombreux simulacres de démonstration, même dans de bonnes copies, sans doute faute de temps.

II-3-a) Quand elle est abordée, cette question est en général bien traitée avec parfois des abus d'hypothèse comme « $\alpha(\mathbf{g}) \in \mathbf{I}(\mathbf{g})$ ».

II-3-b) Les candidats qui abordent cette question démontrent les inégalités (on rencontre cependant des : « ~ 0» ou des traductions de « g~h quant $t \to +\infty$ » par « g-h $\to 0$ quant $t \to +\infty$ ») et déterminent la limite de L(h)(x) quand x tend vers $\alpha(\mathbf{f})$ mais en général n'arrivent pas à démontrer que les deux fonctions L(g) et l(h) sont équivalentes quand x tend vers $\alpha(\mathbf{f})$.

II-4) Peu abordée et rarement avec un équivalent correct.

Partie III

Partie plus rarement traitée sans doute faute de temps.

III-1-a) L'utilisation de la règle de d'Alembert demandait plus de soin (on a même trouvé des inégalités portant sur des nombres complexes non réels) que dans la question I-1). L'utilisation de la convergence uniforme était nécessaire pour justifier la continuité par rapport à t. La formule de Parseval n'est pas toujours citée pour justifier le résultat J= 2π F(x) et on a pu lire des écritures abusives comme :

$$\left|\sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \mathbf{x}^{\mathbf{n}} \frac{\mathbf{e}^{\text{int}}}{\mathbf{n}!}\right|^2 = \sum_{\mathbf{n}=0}^{\infty} \frac{\mathbf{x}^{2\mathbf{n}}}{(\mathbf{n}!)^2} \quad .$$

III-1-b) Question sans difficulté que peu de candidats ont résolu.

III-1-c) Beaucoup de candidats ne font pas l'effort de répondre à la question posée et se contentent de $F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp(2\mathbf{x}\cos\mathbf{t})\mathbf{dt}$.

III-2-a) Une des questions les plus abordées de cette partie. Cependant de nombreux candidats n'arrivent pas à justifier l'existence de la fonction h_2, en particulier pour l'étude au voisinage de 1.

III-2-b)2-c)2-d) Quelques candidats ont préféré ces questions au détriment de la fin de la partie II, cette stratégie a donné des résultats mitigés et presque aucun succès pour III 2 d).

III-2-e)3) Rarement abordées.

III) CONSEILS AUX CANDIDATS

Ce problème a été un bon révélateur des insuffisances ou des qualités des candidats. Même si ces conseils ont été souvent énoncés dans les rapports précédents, il est toujours d'actualité de rappeler que pour aborder avec succès ce type d'épreuve, les candidats doivent :

- s'entraîner à calculer rapidement et efficacement,

- connaître les définitions et théorèmes importants, savoir les énoncer avec précision et en vérifier les hypothèses.

Une minorité de candidats a été apte à suivre ces conseils efficacement.