1.2 – Epreuves écrites

1.2 A - MATHEMATIQUES I - filière MP

I) LE SUJET

L'objet de ce problème est l'étude des propriétés d'une suite $(B_n)_{n\in NN}$ de nombre réels définie par récurrence.

La partie I introduit une certaine série entière et demande de déterminer certains équivalents.

La partie II fait étudier deux fonctions auxiliaires Φ_λ et f_n ainsi qu'une certaine suite $(\mu_n)_{n\in N}$.

La partie III fait étudier la convergence simple d'une suite $(g_n)_{n\in N}$ et établir une certaine majoration.

La partie IV fait étudier les intégrales $\int_R g_n(x)dx$ et se termine par la détermination d'un équivalent de la suite $(B_n)_{n\in N}$.

Le sujet met en jeu une partie du programme d'analyse. Plus précisément, les notions suivantes jouent un rôle important dans le problème : séries entières, familles sommables, suites et séries, équivalents et encadrements, extremas et sens de variations d'une fonction, dérivabilité, théorème de convergence dominée.

II) REMARQUES GENERALES

La majorité des candidats au Concours Commun ont des difficultés pour établir les inégalités ou déterminer les équivalents demandés. En outre, trop de copies ne sont pas assez bien soignées ni bien écrites.

Le problème est très long et personne ne le traite en totalité, toutefois un très petit nombre de candidats impressionnent le jury et obtiennent une note voisine de 20. Les parties I et II sont abordées dans la plupart des copies. La majorité des candidats peuvent résoudre quelques questions de la partie III mais peu nombreux sont ceux qui la traitent complètement. La partie IV n'est en général qu'effleurée.

Beaucoup de notes très basses sont attribuées.

Il semble au jury que ce problème permet de classer les candidats par ordre de mérite. La valeur assez élevée de l'écart type témoigne de la qualité de discrimination du sujet.

III) REMARQUES PARTICULIERES

Nous allons indiquer quelques erreurs ou maladresses fréquemment commises.

A propos de la partie I.

Le fait que la composée de deux séries entières de rayons de convergence infinis soit elle aussi une série entière de rayon de convergence infini est un résultat hors programme MP, qu'il faut donc démontrer.

Le cours sur les familles sommables est souvent cité de manière incorrecte. Si les $u_n, n\in N$ sont des fonctions C^∞ sur *R* telles que la série $\sum u_n$ converge uniformément sur *R* alors en général la somme $\sum u_n$ n'est pas dérivable.

Le fait qu'une fonction E de classe C^∞ et qu'une série formelle $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ soient toutes deux solutions d'une même équation différentielle avec même condition initiale n'implique pas que le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$ soit strictement positif.

Dans la question I 2, beaucoup de candidats se sont embrouillés dans les indices *p, n* et n'ont pas pu manipuler correctement les inégalités nécessaires à la mise en œuvre des démonstrations. Rappelons en outre que $a_k \approx b_k$ n'implique pas $e^{a_k} \sim e^{b_k}$. De plus, l'assertion $\lim_{k\to+\infty} k^n e^{-k(1-\log k)} = 0$ mérite une (courte) démonstration.

A propos de la partie II.

Le jury a été peiné de constater que de nombreux candidats ne savent pas comparer la fonction logarithme avec une fonction puissance. Le fait que $\Phi'_\lambda(\mu) = 0$ ne suffit pas à impliquer que Φ_λ présente un maximum en µ.

Pour prouver qu'une fonction $f :]1,+\infty[\to]0,+\infty[$ induit un C^1 -difféomorphisme, il faut établir la stricte monotonie de *f*, étudier ses limites aux bornes et montrer que *f'* ne s'annule pas.

Les inégalités du II.2.b ont donné lieu à beaucoup de tentatives de tricheries.

A propos de la partie III.

Dans III.1.b, certains candidats auraient pu s'apercevoir que le graphe d'une fonction $\geq$O ne peut pas traverser l'axe *0x*.

De nombreux candidats semblent ne pas connaître le développement en série entière de log(1+x). Rappelons par ailleurs que l'inégalité $u \leq v$ n'entraîne $uz \leq vz$ que si *z* est positif ou nul.

A propos de la partie IV.

L'énoncé du théorème de convergence dominée est souvent cité de manière incorrecte. L'assertion

$$e^{-\frac{x-\log(1+x)}{2}} = o(\frac{1}{x^2}), x \to +\infty$$

mérite une (courte) démonstration.

III) <u>CONSEILS AUX CANDIDATS</u>

Il est préférable de commencer par lire tranquillement la totalité du sujet pour assimiler les notations et comprendre de quoi il retourne.

Il est très important d'écrire lisiblement et d'encadrer les résultats obtenus.

A propos d'une question dont la réponse est donnée dans l'énoncé, le jury attend une démonstration très claire, concise et citant avec précision les résultats antérieurs utilisés et les numéros des questions correspondantes. En aucun cas, le jury ne peut attribuer de points pour une rédaction verbeuse et difficile à comprendre d'autant plus qu'il n'est absolument pas question de pénaliser ceux des candidats qui ont pris le temps de bien rédiger. Nous recommandons donc vivement aux candidats, d'une part de chercher et construire chaque démonstration au brouillon, et d'autre part de ne recopier une démonstration au propre que lorsqu'ils sont certains qu'elle est devenue claire et concise.

De plus, nous conseillons fortement aux candidats qui ne savent pas traiter une question d'indiquer nettement qu'ils en admettent le résultat pour la suite. Tout acte d'honnêteté est très apprécié ; en revanche, toute tentative de dissimulation ou de tricherie indispose les correcteurs et peut être très pénalisante.