SESSION 2025 **PSI8M**

e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

On rappelle qu'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est décroissante sur I si :

$$\forall\,(x,y)\in I^2,\ x\leqslant y\Longrightarrow f(x)\geqslant f(y)$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $u_n(x)=\mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Déterminer l'ensemble D des $x\in\mathbb{R}$ pour lesquels la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n(x)$ converge.

On note alors, pour tout $x\in D$, $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

2. Montrer, sans calculer sa dérivée, que la fonction f est décroissante sur D.

3. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge normalement sur $[1,+\infty[$.

4. Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

5. Soit $J=\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que l'intégrale J converge et prouver que $J=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

EXERCICE 2

Question de cours

1. Soit u une fonction réelle de la variable réelle, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qui ne s'annule pas.

Déterminer une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

*****

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note $E_n=\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels.
Pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, on note $P_k(X)=X^k$ et on rappelle que $\mathscr{B}=(P_0,P_1,...,P_n)$ est une base de E_n.
On considère l'application f qui à tout polynôme $P\in E_n$, associe le polynôme : $P''(X)-4X\,P'(X)$, c'est-à-dire que :

$$f(P)=P''-4X\,P'$$

2. Étude de f

2.1. Justifier que f est un endomorphisme de E_n.

2.2. Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathscr{B}$ de E_n. Expliciter cette matrice dans le cas $n=3$.

2.3. Prouver que f est diagonalisable et préciser la dimension de ses sous-espaces propres.

2.4. Soit P un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Montrer que $\lambda=-4\deg(P)$.

2.5. En déduire que pour tout $p\in[\![0,n]\!]$, il existe un unique polynôme unitaire H_p, de degré p et tel que :

$$f(H_p)=-4p\,H_p$$

On rappelle qu'un polynôme est unitaire lorsque son coefficient dominant vaut 1.

3. Étude de H_p pour $p \in [\![0,n]\!]$

3.1. Démontrer que l'on a :

$$\forall\, p \in [\![1,n]\!],\quad f(H_p') = -4(p-1)\,H_p'$$

3.2. En déduire que :

$$\forall\, p \in [\![1,n]\!],\quad H_p' = p\,H_{p-1}$$

et que :

$$\forall\, p \in [\![2,n]\!],\quad H_p - X\,H_{p-1} + \frac{p-1}{4}\,H_{p-2} = 0$$

3.3. Déterminer H_j pour tout $j \in [\![0,3]\!]$.

4. On note U l'ouvert de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ x \neq y \text{ et } y \neq z \text{ et } z \neq x\}$$

Soit alors G la fonction définie sur U par :

$$\forall\, m = (x,y,z) \in U,\ G(m) = x^2 + y^2 + z^2 - \ln|x-y| - \ln|y-z| - \ln|z-x|$$

4.1. Établir que $m_0 = (a,b,c)$ est un point critique de G si, et seulement si, (a,b,c) est solution du système :

$$(S)\quad \begin{cases} 2a(a-c)(a-b) = 2a-b-c & (L_1) \\ 2b(b-a)(b-c) = 2b-a-c & (L_2) \\ 2c(c-a)(c-b) = 2c-a-b & (L_3) \end{cases}$$

On ne cherchera pas à résoudre le système (S).

4.2. On note $Q = (X-a)(X-b)(X-c)$.

4.2.1. Déterminer les coefficients du polynôme Q.

4.2.2. Montrer que (L_1) équivaut au fait que a est racine de $f(Q)$.

On admettra dans la suite que :

« (a,b,c) est solution du système (S) » **équivaut à** « $f(Q)$ admet pour racines a, b et c ».

4.3. Prouver que si $m_0 = (a,b,c)$ est un point critique de G, alors $f(Q) = -12\,Q$.

4.4. Déterminer alors le polynôme Q.

4.5. En déduire les points critiques de G.

EXERCICE 3

Soient r un nombre réel non nul, n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et M_r la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & r & \cdots & r \\ r & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r \\ r & \cdots & r & 1 \end{pmatrix}$$

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique.
On note enfin J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

1. Exprimer J^2 en fonction de J.

2. En déduire, selon les valeurs de l'entier naturel ℓ, l'expression de J^ℓ.

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(J)$ et le rang de la matrice J.

4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(J)$.

5. Justifier que la matrice J est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

6. Déterminer les valeurs propres ainsi que les sous-espaces propres de la matrice J.

7. Déterminer une matrice diagonale D semblable à J.

8. Démontrer que $\mathrm{Im}(J)$ et $\mathrm{Ker}(J)$ sont deux sous-espaces orthogonaux supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

9. Justifier que $M_r \in \mathrm{Vect}(I_n, J)$.

10. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer explicitement deux réels α_k et β_k tels que $(M_r)^k = \alpha_k I_n + \beta_k J$.
On exprimera le résultat sans le symbole $\sum$.

11. Montrer que la matrice M_r est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

12. Déterminer une matrice Δ_r diagonale semblable à M_r.

13. Dans cette question, on prend $n = 3$.

13.1. Déterminer une matrice P inversible telle que :

$$\Delta_r = P^{-1} M_r P, \text{ où } \Delta_r = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \text{ avec } \lambda_1 = \lambda_2.$$

13.2. Résoudre le système différentiel : $Y' = \Delta_r Y$.

13.3. En déduire les solutions du système différentiel : $Z' = M_r Z$.

FIN