A2025 – MATH II PC

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS et CHAUSSÉES,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2025

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

Étude des séries congruo-harmoniques alternées

L'objectif de ce problème est d'étudier une famille de séries particulières. Quelques premiers résultats sont établis dans les préliminaires. La partie 1 propose d'établir une expression des séries congruo-harmoniques alternées sous la forme d'une intégrale. La partie 2 propose de calculer la valeur de la somme de la série dans certains cas particuliers. La partie 3 s'intéresse à des calculs de probabilités relatifs aux choix des paramètres de la série. Enfin, la partie 4 se propose d'étudier la vitesse de convergence de ces séries.

Notations

— $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels. $\mathbf{N}^*$ désigne l'ensemble des nombres entiers naturels non nuls.

— $\mathbf{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. $\mathbf{R}_+$ désigne l'ensemble des nombres réels positifs ou nuls.

— $\mathbf{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes. Si $z \in \mathbf{C}$, on notera $\overline{z}$ le conjugué de z.

— Pour tout $(a,b) \in \mathbf{N}^2$ avec $a < b$, on pose $[\![a,b]\!] := [a,b] \cap \mathbf{N}$.

— Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

— Pour tout couple $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$, on dit que p divise q et on note $p|q$, s'il existe un entier k tel que $q = kp$.

Définition 1 *Soit $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$. On appelle série* congruo-harmonique *de paramètres p et q, la série de terme général u_k défini pour tout $k \geq 0$ par*

$$u_k := u_{p,q;k} = \frac{(-1)^k}{pk+q} \ ,$$

et l'on note, sous réserve de convergence, $S_{p,q}$ la somme de cette série.

Nous ferons référence aux sommes partielles de cette série par la fonction

$$\phi_{p,q} : \begin{cases} \mathbf{N} \to & \mathbf{R} \\ n \mapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{pk+q} \end{cases} .$$

Préliminaires

1 ▷ Justifier que, pour tout $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$, la série $\sum u_k$ converge.

2 ▷ Dans cette question, on pose $p = q = 1$. Montrer que

$$\phi_{1,1}(n) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt - \int_0^1 \frac{(-t)^{n+1}}{1+t} dt.$$

3 ▷ En déduire la valeur de $S_{1,1}$.

4 ▷ Montrer alors que, pour tout $q \geq 2$,

$$S_{1,q} = (-1)^q \left(\phi_{1,1}(q-2) - \ln 2\right).$$

1 Expression de $S_{p,q}$ sous la forme d'une intégrale

Dans cette partie, on fixe $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$ et on pose $\alpha_{p,q} := \frac{p}{q}$. On définit alors, pour tout $t \in \mathbf{R}_+$, l'application $I_{p,q} : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ par

$$I_{p,q}(t) := \int_0^1 \frac{x^{(t+1)\alpha_{p,q}}}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} dx.$$

5 ▷ Démontrer que l'application $I_{p,q}$ est bien définie et continue sur $\mathbf{R}_+$.

6 ▷ Déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} I_{p,q}(n) = 0.$$

7 ▷ Pour tout $x \in [0, 1]$, calculer $\sum_{k=0}^{n} (-x^{\alpha_{p,q}})^k$ puis en déduire que

$$\phi_{p,q}(n) = \frac{1}{q} \left(\int_0^1 \frac{1}{1 + x^{\alpha_{p,q}}} dx + (-1)^n I_{p,q}(n) \right).$$

8 ▷ Montrer alors que, pour tout $(p, q) \in (\mathbf{N}^*)^2$,

$$S_{p,q} = \int_0^1 \frac{t^{q-1}}{1 + t^p} dt.$$

2 Calcul des $S_{p,q}$ dans trois cas particuliers

L'objectif de cette partie est de déterminer une formulation explicite de la somme de la série congruo-harmonique de paramètres p et q dans trois cas particuliers. On définit pour cela les trois ensembles suivants :

$$\begin{aligned} E_1 &:= \{(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2 : p = q\}, \\ E_2 &:= \{(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2 : p < q,\ p|q\}, \\ E_3 &:= \{(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2 : p > q\}. \end{aligned}$$

Enfin, pour tout couple $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$ fixé, on définit la fraction rationnelle $F(X)$ par

$$F(X) := \frac{X^{q-1}}{1+X^p}.$$

9 ▷ Montrer que, pour tout $(p,q) \in E_1$,

$$S_{p,q} = \frac{\ln 2}{p}. \tag{F1}$$

10 ▷ Pour tout couple $(p,q) \in E_2$, montrer qu'il existe une constante $\lambda := \lambda(p,q)$ que l'on déterminera, telle que

$$S_{p,q} = \frac{(-1)^{\lambda-1}}{p}\left(\ln(2) - \sum_{k=1}^{\lambda-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\right). \tag{F2}$$

Dans le reste de la partie 2, on fixe un couple $(p,q) \in E_3$.

11 ▷ Montrer qu'il existe des constantes $(a_0, b_0, \ldots, b_{\lfloor p/2\rfloor -1}) \in \mathbf{C}^{\lfloor p/2\rfloor+1}$ telles que

$$F(X) = \frac{1-(-1)^p}{2} \cdot \frac{a_0}{X+1} + \sum_{k=0}^{\lfloor p/2\rfloor-1}\left(\frac{b_k}{X-\omega_{p,k}} + \frac{\overline{b_k}}{X-\overline{\omega_{p,k}}}\right),$$

où les $\omega_{p,k}$ sont des constantes que l'on précisera et $F(X)$ la fraction rationnelle définie au début de cette partie.

Dans le cas où p est pair, on posera $a_0 = 0$.

12 ▷ Calculer alors a_0 dans le cas où p est impair puis montrer que, pour tout entier $k \in [\![0, \lfloor p/2\rfloor - 1]\!]$, b_k peut s'écrire sous la forme

$$b_k = -\frac{1}{p}e^{iq\theta_k},$$

où l'on a posé $\theta_k := (2k+1)\frac{\pi}{p}$.

13 ▷ En déduire la décomposition en éléments simples de $F(X)$ dans $\mathbf{R}(X)$:

$$F(X) = \frac{1-(-1)^p}{2} \cdot \frac{(-1)^{q-1}}{p} \cdot \frac{1}{X+1} - \frac{2}{p} \sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor -1} F_k(X),$$

où, pour tout $0 \leq k \leq \lfloor p/2 \rfloor - 1$,

$$F_k(X) := \frac{\cos(q\theta_k)X - \cos((q-1)\theta_k)}{X^2 - 2\cos(\theta_k)X + 1}.$$

On admet que les F_k sont continues sur $[0,1]$ et que pour tout $0 \leq k \leq \lfloor p/2 \rfloor - 1$,

$$\int_0^1 F_k(t)dt = \cos(q\theta_k) \ln\left(2\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right)\right) - \frac{\pi}{2p}(p-1-2k)\sin(q\theta_k).$$

14 ▷ Montrer que

$$\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor -1} \cos(q\theta_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ est pair} \\ \frac{(-1)^{q+1}}{2} & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases}.$$

15 ▷ Déduire des questions précédentes que, pour tout $(p,q) \in E_3$,

$$S_{p,q} = \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{p}\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor -1}(p-1-2k)\sin(q\theta_k) - 2\sum_{k=0}^{\lfloor p/2 \rfloor -1}\cos(q\theta_k)\ln\left(\sin\left(\frac{\theta_k}{2}\right)\right)\right). \qquad \text{(F3)}$$

16 ▷ En déduire les valeurs exactes de $S_{2,1}$ et $S_{3,1}$.

3 Quelques calculs de probabilités

L'objectif de cette partie est d'évaluer la probabilité qu'un couple d'entier $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$ pris au hasard appartienne au domaine d'application d'au moins l'une des formules (F1), (F2) et (F3) obtenues dans la partie 2.

On fixe pour cela $n \in \mathbf{N}^*$ et on décide de tirer successivement et avec remise deux entiers p et q selon une loi uniforme sur l'intervalle $[\![1,n]\!]$. On définit alors les événements suivants, où E_1, E_2 et E_3 sont les trois ensembles définis dans la partie 2 :

E_n : " On obtient $(p,q) \in E_1 \cup E_2 \cup E_3$ ".
A_n : " On obtient $p = q$ ".
B_n : " On obtient $q > p$ et q est divisible par p ".
C_n : " On obtient $p > q$ ".

17 ▷ Justifier que l'ensemble $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme une partition de E_n.

18 ▷ Calculer $\mathbf{P}(A_n)$ puis $\mathbf{P}(C_n)$.

19 ▷ Montrer que

$$\mathbf{P}(B_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n}\left\lfloor\frac{n}{p}\right\rfloor - \frac{1}{n},$$

et en déduire $\mathbf{P}(A_n \cup B_n)$.

20 ▷ En notant $H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ la série harmonique, montrer que

$$H_n \sim \ln n \qquad (n \to +\infty).$$

21 ▷ Montrer alors que

$$\mathbf{P}(A_n \cup B_n) \sim \frac{\ln n}{n} \qquad (n \to +\infty).$$

22 ▷ En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(E_n).$$

4 Vitesse de convergence des $S_{p,q}$

Dans cette dernière partie, on s'intéresse à la vitesse de convergence des séries congruo-harmoniques. On introduit pour cela la définition suivante.

Définition 2 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite convergente vers une limite réelle l telle que $u_n \neq l$ à partir d'un certain rang. On définit alors, sous réserve de convergence, la* vitesse de convergence *V de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par*

$$V = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}-l}{u_n - l}\right|.$$

On qualifie alors la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ selon la valeur de V :

— *Si $V = 0$: la convergence sera qualifiée de* supra-linéaire.

— *Si $V \in \,]0,1[$: la convergence sera qualifiée de* linéaire.

— *Si $V = 1$: la convergence sera qualifiée d'*infra-linéaire.

On définit alors la vitesse de convergence d'une série comme étant celle de la suite de ses sommes partielles.

On définit enfin, pour tout $(p,q) \in (\mathbf{N}^*)^2$, l'application $R_{p,q} := \frac{1}{q} I_{p,q}$ où $I_{p,q}$ est l'application définie dans la partie 1.

23 ▷ À l'aide du changement de variables $s = x^{n+1}$ dans $I_{p,q}(n)$, démontrer que

$$R_{p,q}(n) \sim \frac{1}{2pn} \qquad (n \to +\infty).$$

24 ▷ En déduire la vitesse de convergence de la série congruo-harmonique alternée $\sum u_k$, c'est-à-dire celle de la suite des sommes partielles $(\phi_{p,q}(n))_{n\in\mathbf{N}}$.

Fin du problème