SESSION 2025 **PC8M**

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Question préliminaire

Soit φ la fonction réelle de la variable réelle définie par :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ \varphi(t) = 2t^3 - t^2 + 1$$

1. Étudier les variations de la fonction φ sur l'intervalle $[-1, 1]$ et en donner la représentation graphique dans le plan muni d'un repère.

*****

Soit $f : M = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^3 + y^2 \in \mathbb{R}$.

2. Déterminer les points critiques sur $\mathbb{R}^2$ de la fonction f.

3. En déduire que la fonction f n'admet pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^2$.

4. Soit D le disque fermé de centre O et de rayon 2 : $D = \left\{M = (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 4\right\}$.

4.1. Justifier que f admet dans D des extrema globaux.

4.2. Justifier que ces extrema sont atteints sur le cercle de centre O et de rayon 2.

4.3. Soit M un point du cercle de centre O et de rayon 2 : il existe donc $\alpha \in]-\pi, \pi]$ tel que $M = (2\cos(\alpha), 2\sin(\alpha))$. Démontrer que : $f(M) = 4\,\varphi(\cos(\alpha))$.

4.4. En déduire les extrema globaux de f sur D.

EXERCICE 2

On considère l'équation (E) :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 y''(x) + x\,y'(x) - (x^2 + x + 1)\,y(x) = 0$$

où y est une fonction inconnue de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

1. Soit y de classe $\mathcal{C}^2$ une solution de (E). Calculer $y(0)$.

2. On cherche une solution f de (E) développable en série entière et telle que $f'(0) = 1$.

On suppose qu'il existe $R > 0$ tel que, $\forall\, x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$.

2.1. Montrer que l'on a : $\begin{cases} \forall\, n \geqslant 2,\quad (n^2 - 1)\,a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = 0 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$

2.2. Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que : $\forall\, n \geqslant 1,\quad |a_n| \leqslant \dfrac{1}{(n-1)\,!}$.

2.3. Justifier alors que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ solution de (E). On pose, pour tout x réel, $z(x) = x\,y(x)\,\mathrm{e}^x$.

3.1. Calculer $z(0)$ et $z'(0)$.

3.2. Prouver que z' est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation

$$x\,u'(x) - (2x+1)\,u(x) = 0 \quad (F)$$

d'inconnue la fonction u de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

3.3. Une équation différentielle

3.3.1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$u' - \left(2 + \frac{1}{x}\right) u = 0$$

3.3.2. Justifier que les solutions sont prolongeables par continuité en 0.

3.4. Démontrer que, pour tout réel c, la fonction $x \mapsto cx\,\mathrm{e}^{2x}$ est solution de (F) sur $\mathbb{R}$.

On admet que ce sont les seules solutions de (F) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

3.5. Démontrer qu'il existe un réel a tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ z(x) = a(2x-1)\,\mathrm{e}^{2x} + a$$

3.6. Déterminer alors une expression de f à l'aide des fonctions usuelles.

EXERCICE 3

Soient r un nombre réel, n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et M_r la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_r = \begin{pmatrix} 1 & r & \cdots & r \\ r & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r \\ r & \cdots & r & 1 \end{pmatrix}$$

On rappelle que si $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ alors $A^\top \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de la matrice A.
On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique : $(X \mid Y) = X^\top Y$.
On note enfin J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(J)$ et le rang de la matrice J.

2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(J)$.

3. Prouver que la matrice J est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

4. Déterminer les sous-espaces propres de la matrice J et une matrice diagonale D semblable à J.

5. Démontrer que $\mathrm{Im}(J)$ et $\mathrm{Ker}(J)$ sont deux sous-espaces orthogonaux supplémentaires dans $\mathbb{R}^n$.

6. Justifier que $M_r \in \mathrm{Vect}(I_n, J)$.

7. Vérifier que la matrice M_r est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer une matrice Δ_r diagonale semblable à M_r.

8. Pour tout couple (X, Y) de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on pose $f_r(X,Y) = X^\top M_r\, Y$.

8.1. Soit X un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Montrer que l'application $Y \mapsto f_r(X,Y)$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.

8.2. Montrer que : $\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ f_r(X,Y) = f_r(Y,X)$.

8.3. Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, orthogonale, telle que :

$$\forall (X,Y) \in (\mathbb{R}^n)^2,\ f_r(X,Y) = (X')^\top \Delta_r Y'$$

où l'on a posé $X' = PX$ et $Y' = PY$.
On ne déterminera pas la matrice P.

8.4. Déterminer les valeurs de r pour lesquelles l'application f_r définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

EXERCICE 4

Questions de cours

1. Soit Z une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
Rappeler la loi de Z, son espérance et sa variance.

2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$.
Rappeler la définition de « X_1 et X_2 sont indépendantes ».

*****

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et telles que :

- $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$
- il existe $p \in]0,1[$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = p\,q^k$ avec $q = 1 - p$.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant k) = q^k$.

4. Étude de la variable aléatoire $X + Y$

4.1. Dans quel ensemble la variable aléatoire $X + Y$ prend-elle ses valeurs ?

4.2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $X + Y$.

4.3. Soient n et k deux entiers naturels.

4.3.1. Lorsque $k > n$, calculer $\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X = k)$.

4.3.2. On prend $k \leqslant n$. Démontrer qu'il existe un scalaire r_n tel que : $\mathbb{P}_{(X+Y=n)}(X = k) = r_n$.

5. On pose $V = Y - X$ et $M = \min(X,Y)$ où $\min(a,b)$ désigne le plus petit des deux réels a et b.

5.1. Dans quels ensembles les variables aléatoires V et M prennent-elles leurs valeurs ?

5.2. Calculer, pour tout entier naturel k, la valeur de $\mathbb{P}(M \geqslant k)$.

5.3. En déduire la loi de la variable aléatoire M.

5.4. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $r \in \mathbb{Z}$. Calculer la probabilité de l'évènement $(M = k) \cap (V = r)$.
On pourra distinguer les deux cas $r < 0$ et $r \geqslant 0$.

5.5. En déduire la loi de V.

5.6. Étudier l'indépendance des deux variables aléatoires M et V.

FIN