SESSION 2025 **PC1M**

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Étude d'un endomorphisme matriciel

Présentation générale

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\varphi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi_A : M \mapsto AM$. En particulier, on remarque qu'en notant O_n la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et I_n la matrice d'identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors φ_{O_n} est l'application nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et φ_{I_n} est l'application identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de l'application φ_A.

Partie I - Généralités

Q1. Montrer pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ que l'application φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q2. Montrer pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2$ que $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.

Q3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déduire de la question précédente que φ_A est un isomorphisme si et seulement si la matrice A est inversible. **Indication :** si φ_A est un isomorphisme, on pourra considérer un antécédent par φ_A de la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Partie II - Étude d'un exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$. On considère un nombre $a \in \mathbb{C}$ et la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

Q4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le nombre $a \in \mathbb{C}$ pour que la matrice A soit diagonalisable.

Q5. Déterminer la matrice de φ_A dans la base $C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Q6. En déduire les valeurs propres de φ_A, puis déterminer la dimension de chaque sous-espace propre de φ_A en fonction de $a \in \mathbb{C}$.

Q7. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{C}$ pour que φ_A soit diagonalisable.

Partie III - Réduction de φ_A si A est diagonalisable

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Nous allons étudier les propriétés liant les éléments propres de la matrice A et ceux de l'endomorphisme φ_A.

Q8. Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}$ que $\varphi_A^k = \varphi_{A^k}$.

Q9. En déduire pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ que $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$.

Q10. Rappeler la caractérisation de la diagonalisabilité d'une matrice ou d'un endomorphisme à l'aide d'un polynôme annulateur. En déduire que la matrice A est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme φ_A est diagonalisable.

Q11. On note χ_A le polynôme caractéristique de A. Montrer que $\chi_A(\varphi_A)$ est l'endomorphisme nul. En déduire une inclusion entre l'ensemble des valeurs propres de A et l'ensemble des valeurs propres de φ_A, puis que la matrice A et l'endomorphisme φ_A ont les mêmes valeurs propres.

Q12. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dans le sous-espace propre $E_\lambda(\varphi_A)$ de φ_A pour la valeur propre λ si et seulement si chaque colonne de la matrice M est dans le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ de la matrice A pour la valeur propre λ.

On déduit directement de la question précédente que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de la matrice A, l'application Ψ qui à toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ associe le n-uplet de ses colonnes :

$$\Psi : \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,n} \end{pmatrix} \right)$$

est un isomorphisme du sous-espace propre de $E_\lambda(\varphi_A)$ sur $E_\lambda(A)^n$.

Q13. Dans le cas où la matrice A est diagonalisable, déduire des résultats de cette partie une expression du déterminant et de la trace de φ_A en fonction du déterminant et de la trace de A.

EXERCICE 2

Les polynômes de Hermite

Présentation générale

On définit la suite des polynômes de Hermite dans $\mathbb{R}[X]$ par $H_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_{n+1} = 2XH_n - H_n'.$$

L'objectif de ce problème est d'établir quelques propriétés de cette famille de polynômes.

Partie I - Préliminaires

Les deux sous-parties suivantes peuvent être traitées de manière indépendante.

I.1 - Un produit scalaire sur l'espace des polynômes

Dans cette sous-partie, on introduit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Q14. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $t \mapsto t^n \mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, puis en déduire que cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Q15. En déduire pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ que la fonction $t \mapsto R(t)\mathrm{e}^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On déduit de la question précédente que l'on peut définir l'application $\varphi : \mathbb{R}[X]^2 \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Q16. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

I.2 - Calcul de l'intégrale de Gauss

Dans cette sous-partie, on détermine la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ dont on a prouvé la convergence dans la sous-partie précédente.

On considère les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$u(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad v(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Q17. Justifier que u est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.

Q18. Justifier que v est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.

Q19. Montrer que la fonction $x \mapsto u(x)^2 + v(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$, puis que sa valeur est $\dfrac{\pi}{4}$.

Q20. En déduire que la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est $\sqrt{\pi}$.

Partie II - Quelques propriétés des polynômes de Hermite

Dans cette partie, on établit quelques propriétés sur la famille des polynômes de Hermite. On rappelle que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie dans la présentation générale de l'exercice.

On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

Q21. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que H_n est de degré n et que son coefficient dominant est 2^n.

Q22. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ qu'on a $f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) f(x)$.

On rappelle que le produit scalaire φ sur $\mathbb{R}[X]$ est défini dans la sous-partie **I.1**.

Q23. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant q$. Montrer pour tout entier $k \in [\![0, q]\!]$ que :

$$\varphi(H_p, H_q) = (-1)^{q-k} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k)}(t) f^{(q-k)}(t)\, \mathrm{d}t.$$

Q24. Soit $d \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(H_0, \ldots, H_d)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_d[X]$.

Q25. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, calculer la norme du polynôme H_p.

Partie III - Série génératrice exponentielle des polynômes de Hermite

Dans cette partie, on considère un nombre $x \in \mathbb{R}$.

III.1 - Expression de la série génératrice

L'objectif de cette première sous-partie est de démontrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{H_n(x)}{n!} z^n$ de la variable complexe z admet un rayon de convergence infini et on calcule sa somme.

Q26. Donner les développements en série entière des fonctions $z \mapsto \exp(2xz)$ et $z \mapsto \exp\left(-z^2\right)$ sur $\mathbb{C}$ en précisant leur rayon de convergence respectif.

Q27. Montrer qu'il existe une suite de nombres complexes $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qu'on ne cherchera pas à déterminer explicitement, telle que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ ait un rayon de convergence infini et que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp\left(-(x-z)^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

En considérant la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ introduite dans la **partie II**, on déduit du résultat de la question ci-dessus que l'on a l'égalité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(x-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n.$$

Q28. En utilisant la relation ci-dessus et la question **Q22**, en déduire que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{H_n(x)}{n!} z^n$ admet un rayon de convergence infini et que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp\left(2xz - z^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n.$$

III.2 - Expression intégrale des polynômes de Hermite

Dans cette seconde sous-partie, on exploite les résultats de la sous-partie précédente afin d'établir une expression intégrale pour les polynômes de Hermite.

On considère un entier $p \in \mathbb{N}$ et la fonction $G_x : z \mapsto \exp\left(2xz - z^2\right)$. On définit également pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $g_n : \theta \mapsto \dfrac{H_n(x)}{n!} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-p)\theta}$.

Q29. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} g_n$ converge normalement sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

Q30. Montrer que :

$$H_p(x) = \frac{p!}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_x\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\theta} \, \mathrm{d}\theta .$$

EXERCICE 3

Succession de tirages dans une urne

Présentation générale

On fixe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers naturels non nuls. On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules blanches et on considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule rouge indiscernables au toucher. On procède à des tirages successifs dans cette urne en respectant à chaque fois le protocole suivant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

1. si la boule tirée est de couleur blanche lors du k-ème tirage, on la replace dans l'urne et on ajoute u_k boules blanches supplémentaires ;
2. si la boule tirée est de couleur rouge lors du k-ème tirage, on la replace dans l'urne.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par B_n l'évènement « la boule tirée lors du n-ième tirage est blanche » et on note :

$$E = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n \,.$$

L'objectif principal de cet exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour que la probabilité de l'évènement E soit nulle.

On considère également la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} u_k \,.$$

On rappelle que si A et C sont deux évènements avec $P(C) > 0$, on note $P(A \mid C)$ ou $P_C(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant C.

Partie I - Probabilité de l'évènement E

Dans cette partie, on considère la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $p_n = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q31. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante. En déduire que cette suite est convergente, puis justifier que $P(E) = \lim_{n\to+\infty} p_n$.

Q32. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Si l'évènement $\bigcap_{i=1}^{k} B_i$ est réalisé, décrire la composition de l'urne en fonction de S_k juste avant d'effectuer le $(k+1)$-ième tirage. En déduire la probabilité $P\left(B_{k+1} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{k} B_i\right)$.

Q33. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que :

$$p_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{S_k + 1} \,.$$

Partie II - Caractérisation de la propriété $P(E) = 0$

Q34. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Q35. Montrer que les séries $\sum \ln\left(\dfrac{S_k}{S_k+1}\right)$ et $\sum \dfrac{1}{S_k}$ sont de même nature.

Q36. Montrer que $P(E) = 0$ si et seulement si la série $\sum \dfrac{1}{S_k}$ est divergente.

Q37. Dans cette question, on suppose que $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(E)$.

Q38. Proposer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que $P(E) \neq 0$ en justifiant votre réponse.

FIN