ECOLE POLYTECHNIQUE
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2025

LUNDI 14 AVRIL 2025
08h00 - 12h00

FILIERES MP-MPI - Epreuve n° 1

MATHEMATIQUES A (XULSR)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Notations

▷ On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs.

▷ On note $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. Tous les espaces vectoriels sont sur $\mathbb{C}$.

▷ On note $\mathbb{C}[X]$ l'anneau des polynômes en une indéterminée X à coefficients complexes et $\mathbb{C}(X)$ le corps des fractions rationnelles en X.

▷ Pour m et n entiers naturels, on note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ l'espace des matrices de taille $m \times n$. Lorsque l'on a $m = n$ on le note simplement $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$. On note $\mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ le groupe des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$.

▷ On note $0_{m,n}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. On note 0_m (resp. I_m) la matrice nulle (resp. la matrice identité) de $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$.

▷ Étant donné deux matrices carrées M_1 et M_2, on construit une matrice diagonale par blocs :

$$\mathrm{diag}(M_1, M_2) = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix},$$

où les « 0 » désignent des matrices nulles de tailles convenables. La notation s'étend naturellement à un nombre fini de matrices carrées $(M_1, \ldots, M_s)$ appelées alors *blocs diagonaux* de la matrice ainsi construite.

▷ Étant donné un entier naturel s non nul et une s-liste $(\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \in \mathbb{C}^s$, on note $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$ la matrice diagonale $s \times s$ dont les coefficients diagonaux sont, dans l'ordre, $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$.

▷ Dans ce problème, étant donné un entier naturel r non nul, on appelle *bloc de Jordan* de taille r la matrice $r \times r$ suivante :

$$J_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(tous les coefficients de J_r sont nuls sauf ceux d'indice $(j+1, j)$ pour $1 \leqslant j \leqslant r-1$, qui valent 1). La matrice J_1 est la matrice nulle $\big(0\big)$.

▷ Une matrice est dite *diagonale par blocs de Jordan* si elle est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux qui sont des blocs de Jordan.

▷ Étant donné un espace vectoriel V, on note id_V l'identité de V.

▷ Étant donné un espace vectoriel V et un endomorphisme u de V, un sous-espace W de V est dit *stable par* u si $u(W) \subset W$. On note alors u_W l'endomorphisme de W induit par u, c'est-à-dire $u_W : W \to W$, $v \mapsto u(v)$.

Objectifs et structure du problème

▷ Le premier objectif du problème est de donner une démonstration du fait qu'une matrice nilpotente est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont des blocs de Jordan. Après la partie I, qui regroupe quelques résultats utiles pour la suite, la démonstration occupe les parties II à IV.

▷ Une fois ce théorème établi, on en démontre dans la partie V une version dite « graduée », c'est-à-dire en présence d'une matrice diagonalisable satisfaisant à certaines relations particulières. Ce résultat est utilisé pour donner une forme normale pour les matrices des couples d'applications linéaires $(u_1 \colon V_1 \to V_2, u_2 \colon V_2 \to V_3)$.

▷ Enfin, dans la partie VI, on utilise la version « graduée » de la partie précédente pour classer les couples de matrices rectangulaires à équivalence simultanée près.

I Questions préliminaires

1° Restriction d'un endomorphisme diagonalisable à un sous-espace stable

Soit V un espace vectoriel de dimension finie, soit h un endomorphisme de V et soit W un sous-espace stable par h. On note h_W l'endomorphisme de W induit par h, c'est-à-dire $h_W : W \to W$, $v \mapsto h(v)$. Démontrer que si h est diagonalisable, alors h_W est aussi diagonalisable.

2° Un invariant matriciel

Pour une matrice carrée M et un entier naturel k non nul, on note

$$\delta_k(M) = -\dim\ker M^{k-1} + 2\dim\ker M^k - \dim\ker M^{k+1}.$$

a) Démontrer que si deux matrices carrées M et M' sont semblables, alors $\delta_k(M) = \delta_k(M')$ pour tout k.
b) Soit r un entier naturel non nul. Vérifier que pour tout entier k non nul, $\delta_k(J_r)$ vaut 1 si $k = r$ et 0 sinon.
c) Soient M_1 et M_2 deux matrices carrées et soit $M = \operatorname{diag}(M_1, M_2)$. Démontrer la relation $\dim\ker M = \dim\ker M_1 + \dim\ker M_2$ puis que pour tout entier k non nul,

$$\delta_k(M) = \delta_k(M_1) + \delta_k(M_2).$$

On pourra utiliser sans le démontrer le fait que toutes ces relations s'étendent à une matrice diagonale par blocs $\operatorname{diag}(M_1, \dots, M_s)$.

II Algèbre linéaire sur les polynômes de Laurent

L'espace des *polynômes de Laurent* est le sous-espace vectoriel noté $\mathbb{C}[X^{\pm 1}]$ de $\mathbb{C}(X)$ engendré par la famille $(X^k)_{k\in\mathbb{Z}}$. C'est une sous-algèbre de $\mathbb{C}(X)$. On note $\mathcal{D} = X^{-1}\mathbb{C}[X^{-1}]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}[X^{\pm 1}]$ engendré par la famille libre $(X^{-j})_{j\in\mathbb{N}^*}$: c'est un supplémentaire de $\mathbb{C}[X]$ dans $\mathbb{C}[X^{\pm 1}]$:

$$\mathbb{C}[X^{\pm 1}] = \mathcal{D} \oplus \mathbb{C}[X].$$

On note $\Pi : \mathbb{C}[X^{\pm 1}] \to \mathcal{D}$ la projection sur $\mathcal{D}$ parallèlement à $\mathbb{C}[X]$. Ainsi, pour $F \in \mathbb{C}[X^{\pm 1}]$,

$$\text{si } F = \sum_{k=-p}^{q} f_k X^k \in \mathbb{C}[X^{\pm 1}] \text{ avec } p \text{ et } q \text{ entiers naturels, alors } \Pi(F) = \sum_{k=-p}^{-1} f_k X^k.$$

3° L'application linéaire $\widehat{\xi}$ et l'endomorphisme ξ

On note $\widehat{\xi} : \mathbb{C}[X^{\pm 1}] \to \mathcal{D}$ l'application linéaire qui à un polynôme de Laurent F associe

$$\widehat{\xi}(F) = \Pi(XF) \quad \text{et} \quad \xi = \widehat{\xi}_{\mathcal{D}},$$

c'est-à-dire l'endomorphisme de $\mathcal{D}$ induit par $\widehat{\xi}$ (la lettre ξ (« xi ») évoque le produit par X).
a) Soit F un élément de $\mathbb{C}[X^{\pm 1}]$. Démontrer que $\widehat{\xi}\big(\Pi(F)\big) = \widehat{\xi}(F)$.
b) Soit P un polynôme et soit F un élément de $\mathcal{D}$. Démontrer que $P(\xi)(F) = \Pi\big(PF\big)$.

4° Image et noyau des puissances de ξ

Soit n un entier naturel. Démontrer que ξ^n est surjectif et donner une base du noyau de ξ^n.

5° Sous-espaces cycliques

Soit r un entier naturel non nul. Démontrer que le plus petit sous-espace vectoriel $\mathcal{D}_r$ de $\mathcal{D}$ contenant X^{-r} et stable par ξ admet pour base $(X^{k-r})_{0\leqslant k\leqslant r-1}$. Écrire la matrice de l'endomorphisme $\xi_{\mathcal{D}_r}$ induit par ξ sur $\mathcal{D}_r$ dans cette base.

III Prolongements compatibles

Soit V un espace vectoriel de dimension finie muni d'un endomorphisme u *nilpotent*. On suppose qu'il existe un sous-espace vectoriel W de V stable par u et une application linéaire $\varphi : W \to \mathcal{D}$ tels que

$$\xi \circ \varphi = \varphi \circ u_W.$$

Étant donné un sous-espace W' de V qui contient W et qui est stable par u, on dit que φ *admet un prolongement à W' compatible avec u* s'il existe une application linéaire $\varphi' : W' \to \mathcal{D}$ telle que

(i) la restriction de φ' à W est φ ;

(ii) $\xi \circ \varphi' = \varphi' \circ u_{W'}$.

Le but de cette partie est de démontrer que φ admet un prolongement à V compatible avec u.

6° Prolongement compatible avec u donné par un vecteur

Dans cette question, on suppose que W est strictement inclus dans V et on fixe un vecteur v de V qui n'appartient pas à W.

a) Vérifier que l'ensemble

$$\mathcal{I} = \big\{P \in \mathbb{C}[X],\ P(u)(v) \in W\big\}$$

est un idéal de $\mathbb{C}[X]$.

b) Démontrer qu'il existe un entier naturel n tel que $X^n \in \mathcal{I}$. En déduire que $\mathcal{I}$ est engendré par le monôme X^r pour un entier naturel r convenable que l'on ne demande pas de préciser.

c) Soit W' le sous-espace de V défini par

$$W' = \big\{P(u)(v) + w,\ P \in \mathbb{C}[X] \text{ et } w \in W\big\}.$$

Vérifier que W' contient W et v et qu'il est stable par u.

On note

$$G_v = \varphi\big(u^r(v)\big).$$

d) Démontrer qu'il existe un élément F_v de $\mathcal{D}$ tel que

$$G_v = \xi^r(F_v).$$

e) Soit P un polynôme et soit w un élément de W. Démontrer que si $P(u)(v) = w$, alors $P(\xi)(F_v) = \varphi(w)$.

f) Soit x un élément de W'. Soit P un polynôme et soit w un élément de W tels que $x = P(u)(v) + w$. Démontrer que l'élément $\varphi'(x) = P(\xi)(F_v) + \varphi(w)$ ne dépend que de x et pas du choix de P et w. Vérifier alors que l'application φ' ainsi définie est un prolongement de φ à W' compatible avec u (il n'est pas demandé de vérifier que φ' est linéaire, ce que l'on admettra).

7° Prolongement à V compatible avec u

Démontrer que φ admet un prolongement ψ à V compatible avec u.

IV Théorème de décomposition pour les endomorphismes nilpotents

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et soit u un endomorphisme de V. On suppose que u est nilpotent d'indice n, c'est-à-dire que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

8° Scindage d'un sous-espace cyclique maximal

On choisit un vecteur v_0 tel que $u^{n-1}(v_0)$ n'est pas nul.

a) Vérifier que la famille $\big(v_0, u(v_0), \dots, u^{n-1}(v_0)\big)$ est libre et que le sous-espace W qu'elle engendre contient v_0 et est stable par u. Écrire la matrice de l'endomorphisme induit u_W dans cette base.

b) Démontrer qu'il existe une application linéaire $\varphi : W \to \mathcal{D}$ injective telle que $\xi \circ \varphi = \varphi \circ u_W$.

D'après la partie III, cette application linéaire φ admet un prolongement $\psi : V \to \mathcal{D}$ compatible avec u.

c) Vérifier que l'image de ψ est contenue dans le noyau de ξ^n.

d) Démontrer que le noyau de ψ est un supplémentaire de W stable par u.

9° Théorème de décomposition : existence

Soit u un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel V de dimension finie.
Démontrer qu'il existe une base de V, un entier naturel s et des entiers naturels non nuls $r_1 \geqslant \cdots \geqslant r_s$ dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs et dont les blocs diagonaux sont des blocs de Jordan $J_{r_1}, \dots, J_{r_s}$ de tailles respectives $r_1, \dots, r_s$.
(Les expressions « diagonale par bloc » et « bloc de Jordan » sont définies dans les préliminaires.)

10° Théorème de décomposition : unicité de la taille des blocs

Démontrer que le nombre s et les tailles des blocs $r_1, \dots, r_s$ qui apparaissent dans la question 9° ne dépendent que de u et pas du choix de la base. On pourra utiliser la question 2°.

V Version « graduée » du théorème de décomposition

Dans cette partie, on se donne :

— un espace vectoriel V de dimension finie ;

— un endomorphisme nilpotent u de V ;

— un entier naturel N non nul et le nombre complexe (« zêta »)

$$\zeta = \exp \frac{2i\pi}{N} \ ;$$

— un endomorphisme inversible h de V tel que

$$h^N = \mathrm{id}_V \quad \text{et} \quad h \circ u \circ h^{-1} = \zeta u.$$

11° Propriétés de h

a) Démontrer que h est diagonalisable.

b) Soit j un entier naturel strictement plus petit que N. En notant $V_j = \ker(h - \zeta^j \mathrm{id}_V)$ et $V_N = V_0$, vérifier que $u(V_j) \subset V_{j+1}$.

c) Calculer, pour k entier relatif, $h^k \circ u \circ h^{-k}$ et, pour l entier naturel, $h \circ u^l \circ h^{-1}$.

12° Recherche d'un supplémentaire stable

Soit W un sous-espace vectoriel de V stable par u et h. On suppose que W admet un supplémentaire W' stable par u et on cherche un supplémentaire de W stable par u et h.
Soit p le projecteur sur W parallèlement à W'.

a) Vérifier que u et p commutent.

On note

$$\overline{p} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} h^k \circ p \circ h^{-k}.$$

b) Démontrer que l'image de $\overline{p}$ est incluse dans W et que pour w dans W, on a $\overline{p}(w) = w$.

c) En déduire que $\overline{p}$ est un projecteur et que son image est W.

d) Démontrer soigneusement que $\overline{p}$ commute avec u et h.

e) En déduire que le noyau de $\overline{p}$ est un supplémentaire de W et qu'il est stable par u et h.

13° Version « graduée » du théorème de décomposition

a) Soit n l'indice de u, c'est-à-dire l'entier tel que $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. Démontrer qu'il existe un vecteur v tel que v est un vecteur propre de h et $u^{n-1}(v) \neq 0$.

b) Démontrer qu'il existe une base de V dans laquelle les matrices de u et h sont diagonales par blocs et les blocs diagonaux sont respectivement de la forme

$$J_r \quad \text{et} \quad D_{r,a} = \operatorname{diag}(\zeta^a, \zeta^{a+1}, \ldots, \zeta^{a+r-1})$$

pour $r \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \{0, \ldots, N-1\}$ convenables.

On appellera (r, a) le *type* d'un tel couple de matrices $(J_r, D_{r,a})$.

14° Un exemple

Dans cette question, on suppose de plus que

$$N = 4 \quad \text{et} \quad \ker(h - \mathrm{id}_V) = \{0\}.$$

Pour $j \in \{0, \ldots, 3\}$, on note $V_j = \ker(h - \zeta^j \mathrm{id}_V)$. D'après 11° b), la donnée de u équivaut à la donnée des deux applications linéaires $u_1 : V_1 \to V_2$ et $u_2 : V_2 \to V_3$ induites par u.

a) Vérifier que $u^3 = 0$.

b) Construire des couples (u, h) qui donnent lieu à six types différents de couples de blocs diagonaux $(J_r, D_{r,a})$ dans la version « graduée » du théorème de décomposition.

c) Démontrer que le nombre de blocs de chaque type est déterminé par la donnée des trois dimensions $d_j = \dim V_j$ $(1 \leqslant j \leqslant 3)$ et des trois rangs $r_1 = \operatorname{rg} u_1$, $r_2 = \operatorname{rg} u_2$ et $r_{21} = \operatorname{rg}(u_2 \circ u_1)$.

VI Classification des couples de matrices rectangulaires

Dans toute la suite, on fixe deux entiers naturels m et n non nuls. On souhaite étudier les classes d'équivalence de couples de matrices $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ pour la relation suivante : on dit que deux couples (A, B) et (A', B') sont *simultanément équivalents* s'il existe deux applications linéaires $\alpha : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ et $\beta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ et des bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ de $\mathbb{C}^m$ et $\mathbf{f}$ et $\mathbf{f}'$ de $\mathbb{C}^n$ telles que A et A' soient les matrices de α dans $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$ et $(\mathbf{e}', \mathbf{f}')$ et B et B' celles de β dans $(\mathbf{f}, \mathbf{e})$ et $(\mathbf{f}', \mathbf{e}')$ respectivement.

Pour (A, B) dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ on définit les matrices $(m+n) \times (m+n)$ suivantes :

$$M_{A,B} = \begin{pmatrix} 0_m & B \\ A & 0_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_m & 0_{m,n} \\ 0_{n,m} & -\mathrm{I}_n \end{pmatrix}.$$

15° Une réduction

Soient (A, B) et (A', B') deux couples de matrices dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$. Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) (A, B) et (A', B') sont simultanément équivalents ;

(ii) il existe $P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{C})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $A' = QAP^{-1}$ et $B' = PBQ^{-1}$;

(iii) il existe $R \in \mathrm{GL}_{m+n}(\mathbb{C})$ telle que $M_{A',B'} = RM_{A,B}R^{-1}$ et $H = RHR^{-1}$.

Désormais, on fixe les matrices A et B et on note simplement M à la place de $M_{A,B}$.

16° Deux applications linéaires : décomposition

a) Calculer H^2, HMH^{-1} et, pour un polynôme P de $\mathbb{C}[X]$, calculer $HP(M)H^{-1}$.

b) Démontrer que si un nombre complexe λ est une valeur propre de M, alors $-\lambda$ est aussi une valeur propre de M avec la même multiplicité.

c) Soit χ_M le polynôme caractéristique de M. On l'écrit $\chi_M = X^r Q$ où r est un entier et Q est un polynôme dont le coefficient constant n'est pas nul. Justifier brièvement que

$$\mathbb{C}^{m+n} = \ker M^r \oplus \ker Q(M)$$

et vérifier que ces sous-espaces sont stables par H.

On dit que deux couples de matrices (M, H) et (M', H'), toutes de même taille $p \times p$, sont *simultanément semblables* s'il existe $R \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$ tel que $M' = RMR^{-1}$ et $H' = RHR^{-1}$.

17° **Deux applications linéaires : cas nilpotent**

Dans cette question, on suppose que M est nilpotente.

Démontrer que (M, H) est simultanément semblable à un couple de matrices diagonales par blocs dont les blocs diagonaux sont respectivement de la forme

$$\begin{pmatrix} 0_r & B_0 \\ A_0 & 0_s \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_s \end{pmatrix},$$

où r et s sont des entiers naturels avec $|r-s| \leqslant 1$ et A_0 et B_0 forment l'un des couples suivants :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{s\times(s+1)} \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(s+1)\times s} ;$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{r\times r} = \mathrm{I}_r \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{r\times r} = J_r ;$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{r\times r} = J_r \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{r\times r} = \mathrm{I}_r ;$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_{(r+1)\times r} \quad \text{et} \quad B_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}_{r\times(r+1)} .$$

18° **Deux applications linéaires : cas inversible**

Dans cette question, on suppose que M est inversible.

a) Démontrer que $m = n$ et que A et B sont inversibles.

b) Démontrer que (M, H) est simultanément semblable à un couple de matrices diagonales par blocs dont les blocs diagonaux sont de taille paire et sont respectivement de la forme

$$\begin{pmatrix} 0_r & B_1 \\ A_1 & 0_r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0_r \\ 0_r & -\mathrm{I}_r \end{pmatrix},$$

où

$$A_1 = \mathrm{I}_r \quad \text{et} \quad B_1 = \lambda \mathrm{I}_r + J_r$$

pour r entier non nul et λ complexe non nul convenables.