SESSION 2025 **MP8M**

e3a POLYTECH

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique, par :

$$\forall\, X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ f(X) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

On cherche les extrema éventuels de la fonction f sous la contrainte : $H = \left\{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = 2\right\}$ et les points où ces extrema sont atteints.

Première méthode

1. Déterminer les extrema de la fonction $h : (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mapsto 2u^2 + v^2 + w^2 - 4u + 4$.

2. Déterminer les solutions du problème posé.

Deuxième méthode

Soit $g : X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mapsto x + y - 2$.

3. En utilisant la fonction g, déterminer les extrema possibles de f restreinte à H.

4. Retrouver les solutions du problème posé.

Troisième méthode

Soit $F = \left\{X = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y = 0\right\}$ et $Y = (-1, -1, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$.

5. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner la dimension.

6. Déterminer le sous-espace orthogonal du sous-espace F.

7. Calculer la distance $\mathrm{d}(Y, F)$ entre Y et le sous-espace vectoriel F.

8. Soit $X \in \mathbb{R}^4$. Justifier que : $X \in H \iff X + Y \in F$.

9. En déduire la structure de l'ensemble H.

10. Retrouver de nouveau les solutions du problème posé.

EXERCICE 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On note $E_{n-1} = \mathbb{C}_{n-1}[X]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n, des polynômes de degré inférieur ou égal à $n-1$ et à coefficients dans $\mathbb{C}$.
On note $\mathscr{B} = (Q_0, Q_1, ..., Q_{n-1})$ où, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $Q_k(X) = X^k$, la base canonique de E_{n-1}.
Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on note φ_α l'endomorphisme de E_{n-1} qui à tout polynôme P, associe :

$$\varphi_\alpha(P) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{q=0}^{n-1} P(\alpha^q)\, X^q$$

Soit A_α la matrice de l'endomorphisme φ_α dans la base canonique $\mathscr{B}$ de E_{n-1}.
Soit $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. On rappelle que $\omega^n = 1$ et que $\overline{\omega} = \omega^{-1} = \dfrac{1}{\omega}$.

1. Déterminer, suivant la valeur de l'entier relatif m, la somme : $\sigma_m = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \omega^{m(r-1)}$.

On note $A_\omega = (a_{k,\ell})_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n}$ la matrice associée à l'endomorphisme φ_ω dans la base $\mathscr{B}$ de E_{n-1}.

2. Écrire la matrice A_ω dans le cas où $n = 3$. On utilisera le nombre complexe $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.

3. Démontrer que, pour tout couple $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, on a : $a_{k,\ell} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\,\omega^{(k-1)(\ell-1)}$.

4. La matrice A_ω est-elle symétrique ? Peut-on affirmer qu'elle est diagonalisable ?

5. Calculer $A_\omega \times A_{\overline{\omega}}$. En déduire que A_ω est inversible et déterminer son inverse.

6. Déterminer alors un nombre complexe α tel que : $\varphi_\omega^{-1} = \varphi_\alpha$.

7. Calculer $(A_\omega)^2$ puis vérifier que $(A_\omega)^4 = I_n$.

8. La matrice A_ω est-elle diagonalisable ?

Éléments propres de φ_ω

On note, pour $q \in [\![0,n-1]\!]$, $L_q(X) = \dfrac{X^n - 1}{X - \omega^q}$. En particulier, $L_0(X) = 1 + X + \cdots + X^{n-1}$.

9. Déterminer les valeurs propres possibles de φ_ω.

10. Exprimer les n racines du polynôme $X^n - 1$ à l'aide de puissances de ω.

11. En déduire que : $\forall q \in [\![0,n-1]\!]$, $L_q \in E_{n-1}$.

On pose $H_0 = \mathrm{Vect}(Q_0, L_0)$ et on admet que (Q_0, L_0) en est une base.

12. Vérifier que H_0 est stable par φ_ω.

13. Écrire la matrice de l'endomorphisme induit par φ_ω sur H_0 dans la base (Q_0, L_0).

14. En déduire :

— un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(\varphi_\omega - \mathrm{Id}_{E_{n-1}})$,

— un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(\varphi_\omega + \mathrm{Id}_{E_{n-1}})$.

15. Dans le cas $n = 3$, déterminer le spectre de A_ω.

16. Dans le cas $n = 4$, déterminer les valeurs propres de A_ω.

17. Déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{n}}{\omega} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{n}}{\omega^{n-1}} \\ 0 & \dfrac{\omega}{\sqrt{n}} & 0 & 0 \\ \dfrac{\omega^{n-1}}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On suppose à présent $n \geqslant 5$.

18. Montrer que le sous-espace vectoriel $G = \mathrm{Vect}(Q_1, Q_{n-1}, L_1, L_{n-1})$ est de dimension 4 et est stable par φ_ω.

19. Déterminer le spectre de φ_ω.

EXERCICE 3

Question de cours

1. Rappeler le développement en série entière de la fonction exponentielle et son domaine de validité.

*****

On pose, lorsque cela est possible, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.

2. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Justifier que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que la fonction f est lipschitzienne sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

5. Prouver que pour tout réel positif x, $f'(x) \leq e^x$.

6. Soient x et y deux réels positifs. On note $z = \max(x, y)$. Prouver que l'on a : $|f(x) - f(y)| \leqslant e^z\, |x - y|$.

7. Prouver que l'on a : $f(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} x$.

On pose, pour tout $x > 0$, $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t\,[f(t)]^2}\,dt$.

8. Justifier que g est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

9. Étudier le signe de g sur $]0, +\infty[$.

10. Montrer que : $g(x) \underset{x \to 0}{\sim} \ln(x)$.

11. Prouver que pour tout $t > 0$, on a : $f(t) > 1 + t$.

12. En déduire que g possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

13. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{1}{X(1+X)^2}$.

14. Démontrer que pour tout $x > 1$, on a :

$$g(x) \leqslant \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x+1} + \ln(2) - \frac{1}{2}$$

15. En déduire que g est majorée par $\ln(2)$ sur $]0, +\infty[$.

FIN