CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

MP, MPI

4 heures Calculatrice autorisée

2025

Irrationalité de $\zeta(2)$

Notations

- Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière.
- Si p est un nombre premier et si $n \in \mathbb{N}^\star$, on note $v_p(n)$ la valuation p-adique de n, c'est-à-dire le plus grand entier naturel k tel que p^k divise n.
- Si x est un réel supérieur ou égal à 1, on note $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x. En d'autres termes,

$$\pi(x) = \mathrm{card}\,(\{p \text{ premier},\ p \leqslant x\}) = \sum_{\substack{p \leqslant x \\ p \text{ premier}}} 1$$

où $\mathrm{card}(A)$ désigne le cardinal de l'ensemble fini A.

Partie A – Un encadrement de la fonction π

Le but de cette partie est d'établir l'encadrement suivant de la fonction π :

$$\forall x \in [3, +\infty[\qquad \frac{\ln(2)}{6} \frac{x}{\ln(x)} \leqslant \pi(x) \leqslant 4 \frac{x}{\ln(x)}.$$

I – Calculs préliminaires

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\prod_{\substack{n+2 \leqslant p \leqslant 2n+1 \\ p \text{ premier}}} p \leqslant \binom{2n+1}{n} \leqslant 4^n.$$

Q2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p < 4^n.$$

On pourra procéder par récurrence et effectuer l'hérédité en discutant suivant la parité de n.

Q3. En déduire que, pour tout réel $x \geqslant 1$,

$$\prod_{\substack{p \leqslant x \\ p \text{ premier}}} p < 4^x.$$

Q4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{4^n}{2n} \leqslant \binom{2n}{n} < 4^n.$$

Q5. Soit p un nombre premier. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Q6. En déduire que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ et p nombre premier : si p^k divise $\binom{2n}{n}$, alors $p^k \leqslant 2n$.

II – Majoration de $\pi(x)$

Q7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que

$$\prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p \geqslant \prod_{\substack{\sqrt{n} < p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p.$$

Q8. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$n^{(\pi(n) - \pi(\sqrt{n}))/2} < 4^n.$$

Q9. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Justifier que

$$\pi(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n} < \frac{n}{\ln(n)},$$

puis en déduire que

$$\pi(n) \leqslant 4 \frac{\ln(n)}{n}.$$

On pourra remarquer que $2 > \ln(4)$.

Q10. Soit $x \geqslant 3$. En utilisant la croissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{t}{\ln(t)}$ sur l'intervalle $[\mathrm{e}, +\infty[$, montrer que

$$\pi(x) \leqslant 4 \frac{x}{\ln(x)}.$$

III – Minoration de $\pi(x)$

Q11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\pi(2n)}.$$

Q12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que

$$\frac{2n \ln(2)}{\ln(2n)} - 1 \geqslant \frac{n \ln(2)}{\ln(2n)},$$

puis en déduire que

$$\pi(2n) \geqslant n \frac{\ln(2)}{\ln(2n)}.$$

Q13. Soit $x \geqslant 3$. Montrer que

$$\pi(x) \geqslant \frac{\ln(2)}{6} \frac{x}{\ln(x)}.$$

*On pourra poser $n = \lfloor x/2 \rfloor$ et utiliser **Q12**.*

L'inégalité précédente a été asymptotiquement améliorée en 1896, ainsi on admettra dans la suite du problème le (difficile) résultat suivant, appelé théorème des nombres premiers,

$$\pi(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}.$$

Partie B – Une majoration d'un PPCM

I – Une première majoration

Q14. Soit $r \in \mathbb{N}^\star$. Soient $a_1, \dots, a_r$ des entiers naturels non nuls. Justifier qu'il existe un unique entier naturel $d(a_1, \dots, a_r)$ tel que

$$a_1\mathbb{Z} \cap a_2\mathbb{Z} \cap \cdots \cap a_r\mathbb{Z} = d(a_1, \dots, a_r)\mathbb{Z}.$$

Q15. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Soient $a_1, \dots, a_r$ des entiers naturels non nuls. Montrer que $d(a_1, \dots, a_r)$ est le plus petit entier naturel non nul qui est divisible par $a_1, \dots, a_r$.

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si $a_1, \dots, a_r$ sont des entiers naturels non nuls, $d(a_1, \dots, a_r)$ s'appelle le *plus petit commun multiple* de $a_1, \dots, a_r$ et on le notera dans la suite $\mathrm{PPCM}(a_1, \dots, a_r)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n le PPCM des entiers naturels compris entre 1 et n, autrement dit : $d_n = \mathrm{PPCM}(1, 2, \dots, n)$.

Q16. Calculer d_2, d_3 et d_4, puis montrer que $d_n \leqslant n!$ pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$.

II – Une majoration plus fine

Le but de cette sous-partie est d'améliorer la majoration de d_n.

Dans les deux questions suivantes, on fixe un entier naturel non nul n et, pour tout nombre premier p, on note k_p le plus grand entier naturel tel que $p^{k_p} \leqslant n$.

Q17. Montrer que $d_n = \displaystyle\prod_{\substack{p \leqslant n \\ p \text{ premier}}} p^{k_p}$.

Q18. Pour tout nombre premier p, montrer que $k_p = \left\lfloor \dfrac{\ln(n)}{\ln(p)} \right\rfloor$. En déduire que $d_n \leqslant n^{\pi(n)}$.

Q19. En déduire qu'il existe un entier naturel N non nul tel que, pour tout $n \geqslant N$, $d_n \leqslant 3^n$.
On pourra utiliser le théorème des nombres premiers mentionné ci-dessus.

Partie C – Un critère d'irrationalité

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe deux suites d'entiers naturels non nuls $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{p_n}{q_n} = \alpha \qquad \text{et} \qquad \left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{q_n} \right).$$

On suppose en outre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{p_n}{q_n} \neq \alpha$.

Q20. Montrer que α est un nombre irrationnel.

Soit $\beta = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{n!}}$.

Q21. Justifier que β est bien défini, puis montrer que β est un nombre irrationnel.

Q22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ est bien défini, puis montrer que l'on peut écrire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{p_n}{q_n}$$

avec $p_n \in \mathbb{N}^*$ et $q_n = d_n^2$.

Q23. Peut-on appliquer le résultat de **Q20** à ces suites $(p_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(q_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ pour conclure sur l'irrationalité de $\zeta(2)$?

Partie D – Calcul d'une intégrale double

I – Une intégrale double

Soient r et s deux entiers naturels strictement positifs tels que $r \geqslant s$.

Q24. Soit $y \in \left]0,1\right[$. Justifier que la fonction

$$x \mapsto \frac{x^r y^s}{1-xy}$$

est intégrable sur $[0,1]$.

On pose, pour $y \in \left]0,1\right[$,

$$f_{r,s}(y) = \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy}\,\mathrm{d}x.$$

Q25. Montrer que $f_{r,s}$ est continue et intégrable sur $\left]0,1\right[$.

On pose

$$J_{r,s} = \int_0^1 f_{r,s}(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^r y^s}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Q26. Montrer que

$$J_{r,s} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(r+k+1)(s+k+1)}.$$

II – Une écriture sous forme de quotients

Dans cette sous-partie, on suppose $r > s$.

Q27. Justifier que

$$\frac{1}{(r+k+1)(s+k+1)} = \frac{1}{r-s}\left(\frac{1}{s+k+1} - \frac{1}{r+k+1}\right).$$

Q28. En déduire que

$$J_{r,s} = \frac{1}{r-s}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{s+k+1} - \frac{1}{r+k+1}\right).$$

Q29. En déduire que

$$J_{r,s} = \frac{1}{r-s}\sum_{k=s+1}^{r} \frac{1}{k}.$$

Q30. En déduire que l'on peut écrire

$$J_{r,s} = \frac{p_{r,s}}{q_{r,s}}$$

avec $p_{r,s}$ et $q_{r,s}$ des entiers naturels et $q_{r,s}$ divisant d_r^2.

On admettra que $J_{r,r} = \zeta(2) - \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{k^2}$.

Partie E – Une démonstration de l'irrationalité de $\zeta(2)$

On définit sur $[0,1]$ la fonction P_n par :

$$\forall x \in [0,1], \qquad P_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n\left(x^n(1-x)^n\right)}{\mathrm{d}x^n}.$$

Q31. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que P_n est une fonction polynomiale sur $[0,1]$ de degré n à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

On pose dans la suite

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$
$$(1-y)^n = \sum_{k=0}^{n} b_k y^k$$

avec pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $a_k \in \mathbb{Z}$ et $b_k \in \mathbb{Z}$.

Q32. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence de

$$I_n = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(1-y)^n P_n(x)}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

et montrer que

$$I_n = \sum_{\substack{r,s=0\\ r\neq s}}^{n} a_r b_s J_{r,s} + \sum_{r=0}^{n} a_r b_r J_{r,r}.$$

Q33. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire qu'il existe deux entiers relatifs p_n et q_n tels que

$$I_n = \frac{p_n + \zeta(2) q_n}{d_n^2}.$$

On admettra dans toute la suite que p_n et q_n sont non nuls pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q34. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $y \in]0,1[$,

$$\int_0^1 \frac{P_n(x)}{1-xy}\,\mathrm{d}x = (-y)^n \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n}{(1-xy)^{n+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Q35. En déduire que

$$I_n = (-1)^n \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^n(1-x)^n y^n (1-y)^n}{(1-xy)^{n+1}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Q36. Montrer que

$$\forall (x,y) \in]0,1[^2, \qquad \frac{x(1-x)y(1-y)}{1-xy} \leqslant \frac{5\sqrt{5}-11}{2}.$$

Q37. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que

$$|I_n| \leqslant \zeta(2)\left(\frac{5\sqrt{5}-11}{2}\right)^n.$$

Q38. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geqslant N$,

$$0 < |p_n + \zeta(2)q_n| \leqslant \zeta(2)\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

On pourra utiliser, sans la prouver, l'inégalité $9\dfrac{5\sqrt{5}-11}{2} \leqslant \dfrac{5}{6}$.

Q39. Montrer que $\zeta(2)$ est un nombre irrationnel.

Q40. On admet, uniquement dans cette question, que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$. Montrer que π est un nombre irrationnel.

◇ Fin ◇