

SESSION 2025



MP3M2

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

## MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

NOTE DE L'ÉDITEUR

Le sujet était commun  
aux filières

MP et MPI

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**RAPPEL DES CONSIGNES**

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé d'un exercice d'informatique du tronc commun, d'un exercice et d'un problème de mathématiques.

**EXERCICE 1**

filère MPI

$n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 1.

On se donne des réels strictement positifs notés  $x_1, \dots, x_n$  et on pose :

$$m = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j.$$

On désigne par  $S_n^{++}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices réelles symétriques définies positives d'ordre  $n$ .

**Q1.** Démontrer l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{x_k}{m} - 1\right).$$

**Q2.** En déduire l'inégalité :

$$\left(\prod_{k=1}^n x_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

**Q3.** Établir que l'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si,  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .

**Q4.** Dans cette question  $B$  désigne une matrice de  $S_n^{++}(\mathbb{R})$ . Démontrer l'inégalité :

$$(\det(B))^{1/n} \leq \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(B),$$

et établir que c'est une égalité si, et seulement si,  $B \in \operatorname{Vect}(I_n)$ .

Désormais  $A = (a_{i,j})$  désigne une matrice de  $S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

**Q5.** Démontrer que pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  on a :  $a_{i,i} > 0$ .

**Q6.** On pose  $D = \operatorname{Diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{1,1}}}, \frac{1}{\sqrt{a_{2,2}}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_{n,n}}}\right)$  et  $B = DAD$ . Démontrer que  $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$  et en déduire que :

$$\det(A) \leq a_{1,1} \times a_{2,2} \times \dots \times a_{n,n},$$

avec égalité si, et seulement si,  $A$  est diagonale.

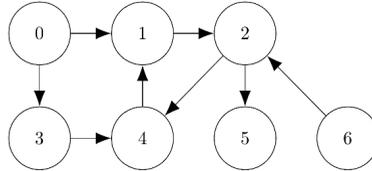
**EXERCICE 1**

filère MP

Hormis **Q3** et **Q4**, les questions de cet exercice sont indépendantes.

Dans cet exercice (informatique du tronc commun), les graphes ont leurs sommets numérotés à partir de 0 et ils sont orientés. On les représente par un dictionnaire d'adjacence.

Par exemple, le graphe :



est représenté par le dictionnaire :

$$d = \{ 0 : [1,3] , 1 : [2] , 2 : [4,5] , 3 : [4] , 4 : [1] , 5 : [] , 6 : [2] \}$$

**Q1.** Écrire en langage Python une fonction `degreMax( d : dict ) -> int` qui reçoit en entrée un dictionnaire d'adjacence représentant un graphe orienté et renvoie le degré sortant maximal parmi tous les degrés sortants des sommets du graphe.

Si  $G$  est un graphe orienté, on appelle graphe inverse de  $G$  le graphe possédant les mêmes sommets ainsi que les mêmes arêtes mais en sens inverse par rapport à celles de  $G$ .

**Q2.** Représenter le graphe inverse du graphe orienté donné en introduction.  
Écrire en langage Python une fonction `grapheInv( d : dict ) -> dict` qui renvoie un dictionnaire d'adjacence du graphe inverse du graphe représenté par  $d$ .

On souhaite colorier notre graphe orienté. Les couleurs sont représentées par des entiers naturels. La coloration du graphe est modélisée par une liste  $L$  telle que  $L[s]$  est égale à la couleur attribuée au sommet  $s$ .

Deux sommets du graphe reliés par une arête ne doivent pas être de la même couleur (coloration du graphe valide).

**Q3.** Écrire en langage Python une fonction `colorationValide( d : dict, L : list ) -> bool` qui renvoie `True` si la coloration  $L$  du graphe représenté par  $d$  est valide et `False` dans le cas contraire.

**Q4.** Donner la complexité dans le pire des cas de la fonction précédente en fonction du nombre  $N$  de sommets et du nombre  $M$  d'arêtes. Justifier votre réponse.

On considère deux tables : `FILMS` et `LOCATIONS`. La première contient des informations sur des films et la seconde des informations sur des locations de films par les clients.

La table FILMS contient les attributs suivants :

- codefilm : code d'un film (entier), clé primaire ;
- nomfilm (chaîne de caractères).

La table LOCATIONS contient les attributs suivants :

- codecli : code du client (entier), clé primaire avec l'attribut codefilm ;
- codefilm : code du film (entier), clé primaire avec l'attribut codecli ;
- datedebut : date de début de la location (chaîne de caractères) ;
- duree : durée de la location (flottant).

**Q5.** Écrire une requête SQL permettant de connaître la plus grande durée de location parmi tous les films.

**Q6.** Écrire une requête SQL permettant d'extraire le code du film, le nom du film et la durée moyenne de location des films qui ont été en moyenne loués moins de 2 jours. Le résultat doit être classé dans l'ordre décroissant des durées moyennes de location.

## EXERCICE 2

On définit une suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{R}[X]$  en posant  $P_0 = 1$ ,  $P_1 = X$  et pour tout entier naturel  $n$  :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

Dans les questions suivantes,  $n$  et  $k$  sont des entiers naturels.

**Q7.** Donner le degré et le terme dominant de  $P_n$  en fonction de  $n$ .

**Q8.** Justifier que pour tout réel  $\theta$  :

$$P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Pour  $P$  et  $Q$  dans  $\mathbb{R}[X]$ , on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

**Q9.** Justifier la convergence de cette intégrale.

**Q10.** Démontrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_k[X]$  (ensemble des polynômes de  $\mathbb{R}[X]$  de degré inférieur ou égal à  $k$ ).

**Q11.** Calculer pour  $n$  et  $m$  entiers naturels,  $\int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta$ .

**Q12.** Donner une base orthonormale de  $\mathbb{R}_k[X]$  pour ce produit scalaire.

## PROBLÈME - Matrices de rang 1

$n$  est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note  $M_n(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices réelles d'ordre  $n$ ,  $M_{n,1}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices colonnes réelles d'ordre  $n$  et  $M_{1,n}(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices lignes réelles d'ordre  $n$ .

### Partie I - Exemples

On suppose que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre  $p \in ]0, 1[$ . On définit les matrices aléatoires :

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = U \times U^T = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1 X_2 & X_1 X_3 & \cdots & \cdots & X_1 X_n \\ X_2 X_1 & X_2^2 & X_2 X_3 & \cdots & \cdots & X_2 X_n \\ X_3 X_1 & X_3 X_2 & X_3^2 & \cdots & \cdots & X_3 X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_n X_1 & X_n X_2 & X_n X_3 & \cdots & \cdots & X_n^2 \end{pmatrix}.$$

**Q13.** On pose  $Y = \text{rg}(M)$ .

Montrer que la variable aléatoire  $Y$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $1 - (1-p)^n$ .

**Q14.** Reconnaître la loi de la variable aléatoire  $\text{Tr}(M)$ .

**Q15.** Vérifier que  $M^2 = \text{Tr}(M)M$  et en déduire la probabilité de l'événement «  $M$  est une matrice de projection ».

**Q16.** Dans cette question, on suppose que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ . On définit la matrice aléatoire  $M$  comme ci-dessus. Avec ces nouvelles hypothèses, calculer à nouveau la probabilité de l'événement «  $M$  est une matrice de projection ».

**Q17.** On note  $J$  la matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  dont tous les coefficients sont égaux à 1. Donner son rang et sa trace, puis la diagonaliser (on précisera une matrice de passage).

**Q18.** Donner (en le justifiant) une matrice d'ordre 3 de rang 1 non diagonalisable. Préciser sa trace.

## Partie II - Résultats généraux

Dans cette partie,  $A$  désigne une matrice de  $M_n(\mathbb{R})$  de rang égal à 1.

**Q19.** On note  $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$  la première colonne non nulle de  $A$ . Démontrer qu'il existe une matrice ligne  $L \in M_{1,n}(\mathbb{R})$  non nulle telle que  $A = C \times L$ .

**Q20.** Calculer le réel  $L \times C$  et en déduire que  $A^2 = \text{Tr}(A)A$ .

**Q21.** Déterminer le polynôme caractéristique de  $A$  ainsi que son polynôme minimal.

**Q22.** Établir que :

$$A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \text{Tr}(A) \neq 0.$$

On note désormais  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  canoniquement associé à  $A$ .

**Q23.** On suppose que  $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ .  
Justifier que  $\text{Im}(u) \subseteq \text{Ker}(u)$ , puis qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle  $u$  est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

**Q24.** On suppose que  $\text{Im}(u) \cap \text{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ .  
Démontrer qu'il existe une base de  $\mathbb{R}^n$  dans laquelle  $u$  est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ (0) & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où  $a$  est un réel non nul.

**Q25.** Conclure que dans  $M_n(\mathbb{R})$  deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.

**FIN**