A2023 – PHYSIQUE I PC

**ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.**

**Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).**

CONCOURS 2023

PREMIÈRE ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de tout dispositif électronique est interdit.

*Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente
sur la première page de la copie :*

PHYSIQUE I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Les sujets sont la propriété du GIP CCMP. Ils sont publiés sous les termes de la licence
Creative Commons Attribution - Pas d'Utilisation Commerciale - Pas de Modification 3.0 France.
Tout autre usage est soumis à une autorisation préalable du Concours commun Mines Ponts.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .

Les sylphes

Un formulaire et des données numériques sont fournis à la fin du sujet.
Toutes les applications numériques seront effectuées avec 1 chiffre significatif.

Les sylphes sont des émissions lumineuses rouges, très intenses et relativement brèves (de l'ordre de quelques centaines de millisecondes) qui se produisent entre le sommet des nuages et l'ionosphère. La majorité d'entre-elles se situe entre 40 et 80 km d'altitude. Elles ne sont observées et étudiées que depuis 1990 environ. Certaines de leurs manifestations avaient déjà été rapportées bien avant mais leur observation depuis la Terre est difficile. Les sylphes font partie d'un groupe d'émissions lumineuses qui se produisent au moment des orages et qui compte aussi les jets bleus et les elfes, voir la figure 1. Ces émissions sont la conséquence de courants électriques importants qui se produisent lors d'une avalanche de créations d'ions et d'électrons. L'initiateur de l'avalanche peut être une particule du rayonnement cosmique. Lors de chocs avec les molécules, les électrons des courants électriques apportent de l'énergie à celles-ci qui la perdent ensuite en émettant de la lumière visible.

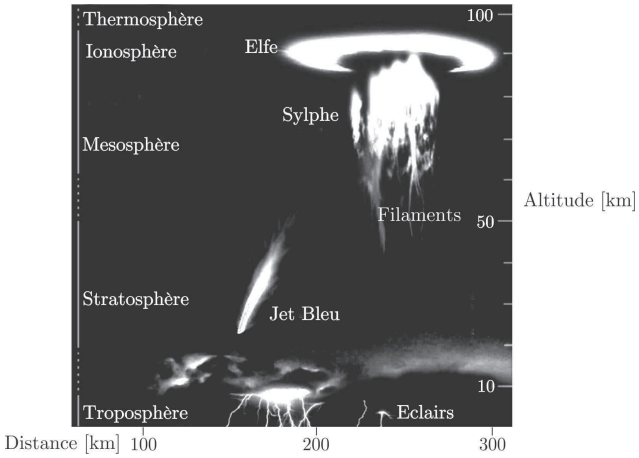

FIGURE 1 – Différentes formes de phénomènes lumineux éphémères atmosphériques

Ce sujet comporte 3 parties largement indépendantes. La première concerne l'observation des sylphes. La seconde étudie des propriétés électriques de l'atmosphère. La dernière partie présente le modèle de la formation avalancheuse du courant à l'origine des sylphes.

I Observation des sylphes

❑ – **1**. À l'aide des courbes de la figure 2, justifier la couleur caractéristiques des sylphes. Justifier également leur observation difficile depuis la surface de la Terre.

Malgré cette difficulté, des images de sylphes ont été obtenues comme celles de la figure 3 qui ont été observées depuis l'Observatoire du Pic du Midi de Bigorre. Des sylphes y ont été vues au-dessus des Alpes. Le Pic du Midi de Bigorre se situe au milieu de la chaîne des Pyrénées qui s'étend de Perpignan à l'Est jusqu'à Biarritz à l'Ouest, séparant la France de l'Espagne.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .

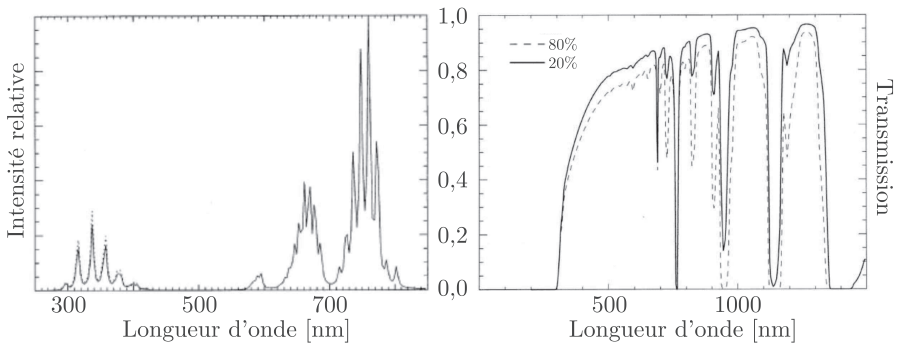

FIGURE 2 – À gauche : spectre d'émission d'un sylphe. À droite : coefficient de transmission de l'atmosphère avec deux taux d'humidité 20% et 80% . Ces mesures ont été réalisées par un détecteur au sol placé sous une source située à 80 km d'altitude – Figures tirées de l'article *Spectrum of Red sprites*, G. Milikh, J. A. Valdiviab & K. Papadopoulos, Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics, Vol. 60, p. 907-915, 1998

Du fait de la rotondité de la Terre de rayon R_T, on s'interroge sur la possibilité de vision de sylphes au-dessus des Alpes.

FIGURE 3 – Photos tirées de l'article *Sylphes rouges, Jets Bleus et elfes*, E. Blanc, R. Roche, T. Farges & F. Simonet publié dans la revue CHOCS, Revue scientifique et technique de la Direction des applications militaires du CEA, numéro 26, décembre 2002

❑ – **2**. La distance d qui sépare à vol d'oiseau le Pic du Midi de Bigorre de la chaîne des Alpes françaises est-elle de l'ordre de 500, 1000 ou 1500 km ?

Sans prendre en compte l'altitude du Pic du Midi de Bigorre, tracer sur un schéma approprié la ligne d'horizon qui en part et qui passe au dessus des Alpes à une altitude h.

En faisant les hypothèses qui s'imposent exprimer h en fonction de R_T et d et calculer sa valeur numérique.

Est-il possible de voir des sylphes alpins sans effet de réfraction atmosphérique depuis le Pic du Midi de Bigorre ? Peut-on voir le Mont-Blanc par beau temps ?

Afin de pouvoir observer régulièrement des sylphes et de développer des recherches visant à mieux comprendre leur origine, on utilise depuis 2001 sur la station spatiale internationale (ISS), deux microcaméras fixées sur un hublot. Les deux caméras observent selon la verticale. L'une de ces deux caméras opère dans le visible tandis que l'autre est équipée d'un filtre de très faible bande passante centré à 761 nm. Sur la figure 4, on peut observer les deux images obtenues lors d'un enregistrement. Cet enregistrement a été réalisé lors d'un orage important.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .

Sur ces images, l'intensité lumineuse obtenue est exprimée en LSB (Lower Significative Bit : unité de mesure spécifique de la caméra). On indique qu'un éclair traditionnel provoque un niveau de 836 LSB sur la caméra opérant dans le visible et donne 30 LSB sur la caméra filtrée.

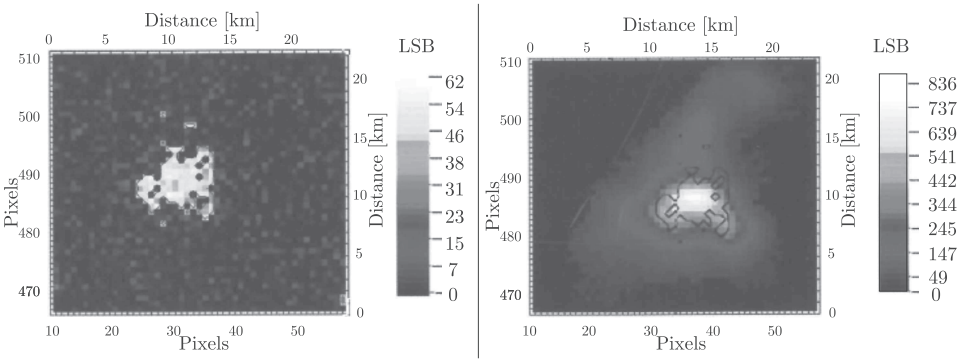

FIGURE 4 – Enregistrements effectués depuis l'ISS par la microcaméra filtrée à gauche et par la microcaméra dans le visible à droite. Un trait noir isole la détection d'un sylphe sur l'image de droite - Figures toujours tirées de l'article référencé sur la figure 3.

❑ – **3**. Montrer que l'analyse des deux images de la figure 4 prouve bien la détection d'un sylphe.

❑ – **4**. L'ISS se situe à une altitude h_{ISS} d'environ 400 km. Montrer en utilisant le théorème de GAUSS, et moyennant certaines hypothèses que l'on précisera, que le champ gravitationnel qu'elle subit est de la forme :

$$G_{\text{ISS}} = g_0 \left(1 + \frac{h_{\text{ISS}}}{R_T}\right)^{-2}$$

où $g_0 = 9{,}8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ est le champ de pesanteur à la surface de la Terre.

❑ – **5**. Après avoir montré qu'elle est constante, déterminer l'expression v_{ISS} de la norme de la vitesse de l'ISS sur son orbite circulaire. Calculer sa valeur numérique en $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$.

❑ – **6**. Déterminer l'expression de la période de révolution T_{ISS} de l'ISS autour de la Terre et faire le lien avec la troisième loi de KÉPLER.

❑ – **7**. Les deux microcaméras de l'ISS ont pour objectif d'enregistrer, lors d'un passage au-dessus d'un orage, la totalité de l'évolution d'un sylphe. Commenter la possibilité et la précision de ces enregistrements. On justifiera les réponses de façon numérique.

Il est difficile d'observer des sylphes depuis la Terre dans le visible car le dioxygène O_2 présent dans l'atmosphère absorbe fortement à 762 nm. Toutefois, le dioxygène se raréfie fortement avec l'altitude, ce qui permet des observations au-delà de 40 km d'altitude comme cela est le cas avec l'ISS. Nous allons étudier l'évolution de la pression partielle $P_{\mathsf{O}_2}(z)$ de dioxygène en fonction de l'altitude z. Le modèle que nous utilisons est le suivant :

— L'atmosphère est assimilée à un gaz parfait de masse molaire $M = 29\ \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

— La fraction molaire de dioxygène O_2 est supposée la même à toute altitude z et égale à celle à la surface de la Terre à savoir $x_{\mathsf{O}_2} = 20\%$.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .

— L'atmosphère est supposée en équilibre de telle sorte que la loi de la statique des fluides s'y applique et on ne prendra en compte que le poids assimilé à la force gravitationnelle.

— La pression à la surface de la Terre est $P_0 = 1$ bar en $z = 0$, la température $T_0 = 290$ K.

— La température évolue selon la loi $T(z) = T_0(1 - z/\ell)$ avec $\ell = 50$ km, ce qui limite le modèle nécessairement à des altitudes inférieures à ℓ.

❑ – **8**. Rappeler, sans démonstration, l'expression vectorielle de la loi de la statique d'un fluide de masse volumique μ.

Montrer que la pression atmosphérique $P(z)$ obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -F(z)\frac{P}{H} \qquad \text{avec} \qquad F(z) = \frac{1}{(1 - z/\ell)\,(1 + z/R_T)^2}$$

où H est une distance caractéristique que l'on exprimera en fonction de R, T_0, M et g_0. Évaluer numériquement H en kilomètres avec un seul chiffre significatif.

En décomposant la fonction F, on peut écrire $F(z) = \dfrac{\alpha}{1 - z/\ell} + \dfrac{\beta + \gamma z}{(1 + z/R_T)^2}$ en introduisant les constantes $\alpha = [1 + \epsilon(2 + \epsilon)]^{-1}$, $\beta = \alpha\epsilon(2 + \epsilon)$ et $\gamma = \alpha\epsilon/R_T$ à condition de poser $\epsilon = \ell/R_T$.

❑ – **9**. Montrer que dans les conditions du problème on peut prendre $\alpha \simeq 1$, $\beta \simeq 2\epsilon$ et $\gamma \simeq \epsilon/R_T$.

Montrer que la pression $P(z)$ dans l'atmosphère est alors donnée par :

$$P(z) = P_0 \left(\frac{1 - z/\ell}{1 + z/R_T}\right)^{\xi} \exp\left[-\frac{z}{\chi(1 + z/R_T)}\right] \tag{1}$$

dans laquelle on précisera l'expression des quantités ξ et χ en fonction de ℓ, H et R_T.

❑ – **10**. Quelle expression simplifiée de $P(z)$ proposeriez-vous à la lumière de l'expression précédente et des valeurs des grandeurs engagées dans celle-ci ? À quoi cela revient-il à faire ?

Sur la figure 5 ci-dessous, on a représenté sur le même schéma d'une part le modèle de pression de l'équation (1) pour les valeurs adaptées des paramètres et d'autre part la valeur de la pression mesurées par des sondes atmosphériques et spatiales.

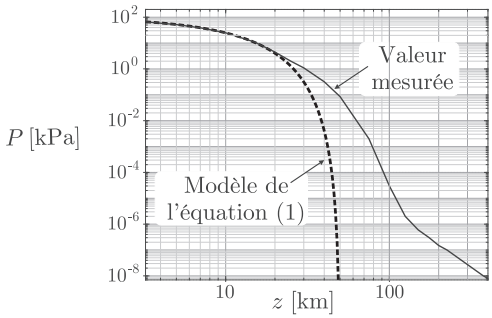

FIGURE 5 – Pression de l'air atmosphérique

❑ – **11**. Pour quelle raison principale, le modèle étudié cesse-t-il d'être correct à partir d'une altitude de l'ordre de $z = 20$ km alors qu'il est censé fonctionner potentiellement jusqu'à 50 km ?

❑ – **12**. Discuter la possibilité d'observation des sylphes en lien avec la pression partielle en dioxygène depuis la Terre et depuis l'ISS.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .

II Une atmosphère électrique

L'atmosphère est assimilée à un plasma dans lequel le courant électrique est essentiellement dû à des déplacements d'électrons non relativistes. La densité d'électrons mobiles par unité de volume est notée n, la masse d'un électron m_e, sa charge e.
On étudie, dans un premier temps, la propagation d'une onde électromagnétique plane progressive monochromatique de pulsation ω, de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_z$, polarisée rectilignement et décrite par son vecteur champ électrique à l'instant t, $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(\omega t - kz)$ avec $\vec{E}_0 \perp \vec{e}_z$ et $\|\vec{e}_z\| = 1$.

L'atmosphère est caractérisée par la permittivité diélectrique du vide ε_0 et par la perméabilité magnétique du vide μ_0. Dans cette étude, on néglige les chocs que subissent les électrons et leur poids. La seule force agissant sur les électrons est la force de LORENTZ.

❑ – **13**. Montrer que la contribution magnétique de la force de LORENTZ sur l'électron est négligeable devant la contribution électrique de cette même force.

❑ – **14**. Justifier le fait que la contribution des ions au courant électrique est négligeable devant celle des électrons. Déterminer la relation qui existe entre la représentation complexe du champ électrique $\vec{E}$ de l'onde électromagnétique et celle de la densité volumique de courant $\vec{j}$ qui résulte de l'interaction entre l'électron et $\vec{E}$. Donner l'expression de la conductivité complexe du plasma γ_p et commenter cette expression en terme de puissance transférée.

❑ – **15**. Établir l'équation de propagation du champ électrique $\vec{E}$. En déduire la relation de dispersion vérifiée par le vecteur d'onde k.

❑ – **16**. Pour quelle fréquence limite f_p, une onde envoyée depuis la surface de la Terre ne peut plus se propager lorsqu'elle rencontre un milieu où la densité volumique d'électrons est n ? On détaillera le raisonnement permettant d'obtenir cette limite. Effectuer l'application numérique pour une densité $n = 10^{11}$ m^{-3} caractéristique des sylphes.

❑ – **17**. L'image de la figure 6 montre la localisation et le nombre d'échos radar qui reviennent au niveau de l'émetteur. Analyser et commenter cette carte.

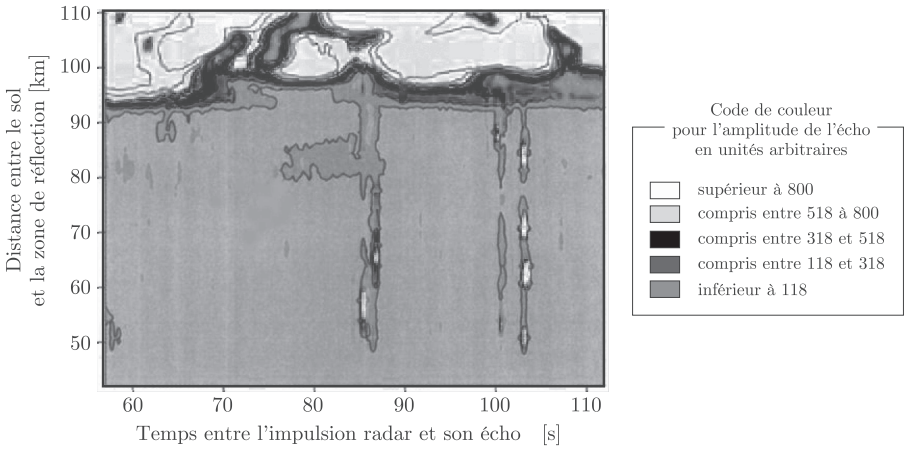

FIGURE 6 – Carte d'échos radar à 2,2 MHz depuis le sol pour l'évènement enregistré à 13h39 le 15 octobre 1994 dans la station de Khorogo (Côte d'Ivoire) – figure tirée de l'article *HF echoes from ionization potentially produced by high-altitude discharges*, R.A. Roussel-Dupré & E. Blanc, Journal of geophysical research, Vol. 102, n°A3, p. 4613-4622, 1997

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .

III Formation avalancheuse de courant

L'origine des sylphes est toujours discutée à l'heure actuelle.
Un modèle repose sur la formation d'un courant lié à des ionisations en cascade provoquées par un électron primaire capable d'ioniser par chocs successifs des molécules de l'atmosphère, principalement du diazote N_2.
Les électrons fils créés par l'électron primaire peuvent à leur tour provoquer de nouvelles ionisations d'où l'effet d'avalanche. Cet électron primaire peut provenir du rayonnement cosmique qui éclaire en permanence la terre. Nous allons tout d'abord étudier la possibilité pour un tel électron de provoquer l'ionisation d'une molécule de diazote.

On considère un modèle unidimensionnel d'axe Ox où N_0 électrons se déplacent de façon homogène dans le sens x croissant. Ces électrons sont répartis aléatoirement dans une section donnée Σ. Leur déplacement s'effectue dans un milieu peu dense où la densité volumique de molécules est n_{mo}. On s'intéresse à la distance moyenne $\langle x \rangle$ qu'ils vont parcourir avant de subir un choc avec une molécule. Cette distance porte le nom de libre parcours moyen : $\ell_{\text{pm}} = \langle x \rangle$. On appelle $N(x) < N_0$ le nombre d'électrons qui ont atteint l'abscisse x sans subir de choc depuis $x = 0$. La probabilité qu'un électron subisse un choc entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ est le rapport de la section efficace totale associée à l'ensemble des molécules présentes entre x et $x + \mathrm{d}x$ et de la section Σ. À chaque molécule est associée une section efficace S_{eff} qui traduit le fait que si l'électron arrive sur cette surface, le choc se produit et s'il passe à côté, il n'y a pas de choc.

❑ – **18**. En raisonnant entre x et $x + \mathrm{d}x$, établir l'équation différentielle d'évolution de $N(x)$. Résoudre cette équation et exprimer $N(x)$ en fonction de N_0, n_{mo}, S_{eff} et x.

❑ – **19**. Montrer que le libre parcours moyen s'écrit $\ell_{\text{pm}} = \langle x \rangle = \dfrac{1}{n_{\text{mo}} S_{\text{eff}}}$

❑ – **20**. Pour la molécule de diazote, on a $S_{\text{eff}} \simeq 10^{-20}$ m^2. Justifier cet ordre de grandeur pour la section efficace. Déterminer la valeur numérique du libre parcours moyen ℓ_{pm} pour un électron à l'altitude $z_3 = 60$ km d'altitude où la pression est $P_3 = 20$ Pa et la température $T_3 = 260$ K.

Au niveau des sylphes, il existe un champ électrique qui a pour principale origine les charges présentes à la surface des nuages d'une part et celles présentes à la limite entre la mésosphère et l'ionosphère vers 100 km d'altitude. Son intensité est $E \simeq 100\ \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$.

❑ – **21**. Sachant que l'énergie d'ionisation de la molécule de diazote est $\mathcal{E}_i \simeq 16$ eV, un électron initialement au repos et accéléré par le champ électrique local d'intensité E peut-il ioniser cette molécule ? On apportera des arguments numériques.

On soupçonne fortement des électrons cosmiques relativistes possédant une énergie cinétique de 1 MeV d'être à l'origine de la cascade avalancheuse.

❑ – **22**. Justifier le fait que ces électrons cosmiques sont nécessairement relativistes.

❑ – **23**. Expliquer le phénomène de cascade avalancheuse.

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .

On cherche à déterminer à partir de quel moment on atteint une densité moyenne $n = 10^{11}$ m^{-3} d'électrons caractéristique des sylphes. On note $\mathscr{N}$ le nombre d'étapes produisant des électrons lors des chocs. Pour simplifier, on considère que tous les électrons produits jusqu'à l'étape $\mathscr{N}$ sont contenus dans un volume dont la taille caractéristique est $\mathscr{N}\ell_{\text{pm}}$.

❑ – **24**. Déterminer la valeur numérique de $\mathscr{N}$. Pour cette question, on prendra un libre parcours moyen ℓ_{pm} de l'ordre du centimètre. On pourra utiliser les courbes de la figure 7 en expliquant de façon détaillée la démarche suivie.

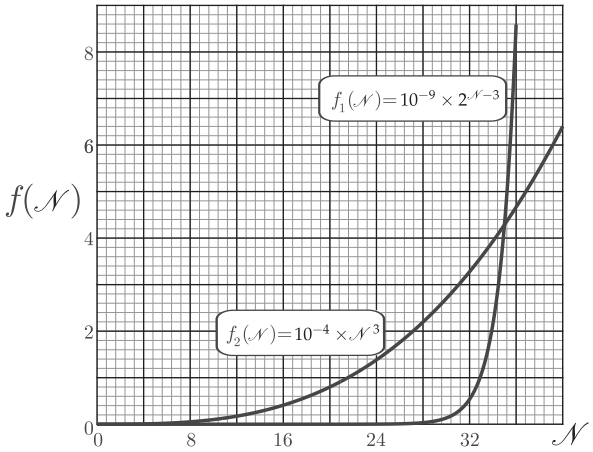

FIGURE 7 – Représentation graphique des fonctions $\mathscr{N} \mapsto 10^{-4} \times \mathscr{N}^3$ et $\mathscr{N} \mapsto 10^{-9} \times 2^{\mathscr{N}-3}$

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .

Formulaire

On rappelle la relation d'analyse vectorielle du double rotationnel agissant sur un champ vectoriel $\vec{A}$:

$$\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}}\,\vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{A}) - \vec{\Delta}\vec{A}$$

Données numériques

Constante molaire des gaz parfaits : $R = 8{,}3\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}4\times10^{-23}\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}$
Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_A = 6{,}0\times10^{23}\ \text{mol}^{-1}$
Constante de Newton de gravitation : $\mathcal{G} = 6{,}7\times10^{-11}\ \text{m}^3\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}$
Champ de pesanteur à la surface de la Terre : $g_0 = 9{,}8\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$
Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}4\times10^{3}$ km
Permittivité diélectrique du vide : $\varepsilon_0 = 8{,}9\times10^{-12}\ \text{F}\cdot\text{m}^{-1}$
Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}0\times10^{8}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$
Masse du proton et masse du neutron : $m_p = m_n = 1{,}7\times10^{-27}$ kg
Masse de l'électron : $m_e = 9{,}1\times10^{-31}$ kg
Charge de l'électron : $e = 1{,}6\times10^{-19}$ C
Constante de Planck : $h = 6{,}6\times10^{-34}\ \text{J}\cdot\text{s}$

Téléchargé gratuitement sur Doc-Solus.fr .