

SESSION 2023



PC8M

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

## MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

## RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites.

**Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.**

## EXERCICE 1

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n \geq 1$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$ , tel que :

$$u^2 - 3u + 2 \operatorname{id}_E = 0 \quad (\star)$$

où  $0$  désigne l'endomorphisme nul  $0_{\mathcal{L}(E)}$ .

1. L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?
2. Déterminer les valeurs propres possibles  $\alpha$  et  $\beta$  de l'endomorphisme  $u$ . On choisira  $\alpha$  inférieure à  $\beta$ .
3. On pose alors  $v = u - \alpha \operatorname{id}_E$  et  $w = u - \beta \operatorname{id}_E$ .
  - 3.1. Déterminer l'endomorphisme  $v - w$  et en déduire que  $E = \operatorname{Im}(v) + \operatorname{Im}(w)$ .
  - 3.2. Préciser  $v \circ w$  et  $w \circ v$ .
  - 3.3. Prouver que  $\operatorname{Im}(w) \subset \operatorname{Ker}(v)$  et que  $\operatorname{Im}(v) \subset \operatorname{Ker}(w)$ .
  - 3.4. Démontrer que  $E = \operatorname{Ker}(v) \oplus \operatorname{Ker}(w)$ .
4. Comment peut-on déterminer une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est diagonale ?

### 5. Application

Dans cette question,  $E$  est de dimension trois. On munit  $E$  de la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  et, dans cette

base, on définit l'endomorphisme  $u$  par sa matrice  $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

- 5.1. Vérifier que  $u$  satisfait à la relation  $(\star)$ . *On fera apparaître les calculs sur la copie.*
- 5.2. Déterminer les matrices  $V$  et  $W$  des endomorphismes  $v$  et  $w$  définis à la question 3.
- 5.3. Déterminer une base  $\mathcal{B}_1$  de  $\operatorname{Ker}(v)$  et une base  $\mathcal{B}_2$  de  $\operatorname{Ker}(w)$ .
- 5.4. Déterminer une matrice diagonale  $D$  et une matrice inversible  $P$  telles que  $U = PDP^{-1}$ .

## EXERCICE 2

### Questions de cours

1. Soit  $\alpha$  un réel non nul.  
Donner un développement limité à l'ordre 2 en 0 de la fonction  $x \mapsto (1 - x)^\alpha$ .  
En déduire un équivalent de  $1 - (1 - x)^\alpha$  lorsque  $x$  tend vers 0.
2. Soient  $a$  et  $b$  deux réels avec  $a > 0$ . Choisir sans justification l'expression correcte de  $a^b$  :

$$(A) \ e^{b \ln(a)} \quad (B) \ e^{a \ln(b)} \quad (C) \ e^{\ln(a) \ln(b)}.$$

\*\*\*\*\*

**Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2.**

3. Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on pose  $a_k = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-1}$  et pour  $k \geq 1$ ,  $u_k = a_{k-1} - a_k$ .

3.1. Montrer que la série de terme général  $u_k$  est convergente et calculer sa somme.

3.2. Montrer que la série de terme général  $a_k$  est convergente.

On notera  $S_n$  sa somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

#### 4. Étude d'une variable aléatoire

4.1. Démontrer que  $\forall k \geq 1, u_k > 0$ .

4.2. Dans l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ , on considère la variable aléatoire  $X_n$  à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$  telle que, pour tout  $k > 0$ ,  $\mathbb{P}(X_n = k) = \lambda u_k$ , où  $\lambda$  est un réel. Déterminer  $\lambda$ .

4.3. Montrer que  $X_n$  admet une espérance et que  $\mathbb{E}(X_n) = S_n$ .

5. Pour tout  $t$  réel, on pose  $f_0(t) = 0$  et pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_p(t) = 1 - (1 - e^{-t})^p$ .

5.1. Pour tout entier naturel  $p$ , montrer que l'intégrale  $I_p = \int_0^{+\infty} f_p(t) dt$  est convergente.

5.2. Calculer  $I_{p+1} - I_p$  pour tout entier naturel  $p$ .

5.3. En déduire que :  $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = I_{n-1}$ .

#### 6. Un encadrement

6.1. Prouver que, pour tout entier naturel non nul  $k$ ,  $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$ .

6.2. En déduire que :  $\ln(n) \leq I_{n-1} \leq 1 + \ln(n-1)$ .

7. Soit  $g_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :  $\forall t \geq 0, g_n(t) = 1 - (1 - 2^{-t})^{n-1} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^t}\right)^{n-1}$ .

Montrer que pour tout entier  $m \geq 2$  :

$$\sum_{k=1}^m a_k \leq \int_0^m g_n(t) dt \leq \sum_{k=0}^{m-1} a_k.$$

8. Soit  $\beta$  un réel strictement positif, montrer que l'on a :

$$\int_0^\beta g_n(v) dv = \frac{1}{\ln(2)} \int_0^{\beta \ln(2)} f_{n-1}(u) du.$$

9. Démontrer que :  $\mathbb{E}(X_n) - 1 \leq \frac{I_{n-1}}{\ln(2)} \leq \mathbb{E}(X_n)$ .

10. Donner un équivalent simple de  $S_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

## EXERCICE 3

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2.

On désigne par  $E$  un espace vectoriel euclidien de dimension  $n$ .

Le produit scalaire de deux vecteurs  $x$  et  $y$  de  $E$  est noté  $\langle x | y \rangle$  et  $\|x\|$  représente la norme du vecteur  $x$ .

Pour tout vecteur  $u$  non nul de  $E$ , on note  $\varphi_u$  l'application de  $E$  dans lui-même définie par :

$$\forall x \in E, \quad \varphi_u(x) = 2 \frac{\langle x | u \rangle}{\langle u | u \rangle} u - x.$$

### 1. Étude de l'application $\varphi_u$

- 1.1. Montrer que  $\varphi_u$  est un endomorphisme de  $E$ .
- 1.2. En calculant  $\varphi_u \circ \varphi_u$ , montrer que  $\varphi_u$  est un automorphisme de  $E$  et déterminer  $\varphi_u^{-1}$ .
- 1.3. Soit  $x$  appartenant à  $E$ , calculer  $\langle \varphi_u(x) | \varphi_u(x) \rangle$ .
- 1.4. En déduire que  $\varphi_u$  conserve le produit scalaire, c'est-à-dire que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \langle \varphi_u(x) | \varphi_u(y) \rangle = \langle x | y \rangle.$$

- 1.5. On note  $D_u$  la droite vectorielle de base  $u$  et  $H_u = D_u^\perp$ .  
Déterminer l'image de  $D_u$  par  $\varphi_u$ .  
En déduire sans calcul que  $H_u$  est stable par  $\varphi_u$ .
- 1.6. Reconnaitre alors la nature géométrique de l'endomorphisme  $\varphi_u$  et en donner les éléments caractéristiques.

### 2. Étude d'un exemple dans le cas $n = 3$

Soit  $H$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  muni de sa structure euclidienne canonique et constitué des

vecteurs  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  tels que  $x + y + z = 0$ .

- 2.1. Donner la dimension et une base orthonormale de  $H^\perp$ .
- 2.2. Écrire la matrice dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  de la projection orthogonale sur  $H^\perp$  puis celle de la projection orthogonale sur  $H$ .
- 2.3. Soit  $v$  un vecteur unitaire de  $H^\perp$ .  
Écrire la matrice de  $\varphi_v$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

### 3. Étude d'une réciproque

Soit  $\psi$  un endomorphisme de  $E$  tel qu'il existe une droite vectorielle  $\Delta$  de  $E$  vérifiant :

$$\forall x \in \Delta, \quad \psi(x) = x \quad \text{et} \quad \forall x \in \Delta^\perp, \quad \psi(x) = -x.$$

- 3.1. Montrer que  $\psi \circ \psi = \text{id}_E$  et que  $\psi$  conserve le produit scalaire.
- 3.2. Montrer qu'il existe au moins un vecteur  $u$  de  $E$  tel que  $\psi = \varphi_u$ .

## EXERCICE 4

Pour tout entier naturel  $n$  et tout réel  $x$ , on pose :

$$I_n(x) = \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(tx) dt.$$

1. Étudier la parité des fonctions  $I_n$ .
2. Prouver que les fonctions  $I_n$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
3. Démontrer que, pour tout réel  $x$  et tout entier naturel  $n$ ,  $I'_n(x) = -\frac{x}{2(n+1)} I_{n+1}(x)$ .
4. Prouver par récurrence sur l'entier naturel  $k$ , que la fonction  $I_n$  est, pour tout entier naturel  $n$ , de classe  $C^k$  sur  $\mathbb{R}$ .

Soit  $n$  un entier naturel fixé.

### 5. Calcul de $I_n(0)$

- 5.1. Déterminer, pour tout entier naturel  $p$ , une relation entre  $I_{p+1}(0)$  et  $I_p(0)$ .
  - 5.2. En déduire l'expression de  $I_n(0)$  à l'aide de factorielles.
6. Calculer la somme :  $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!(n-k)!}$ .
- Le résultat sera exprimé à l'aide de factorielles.
7. Donner le développement en série entière au voisinage de 0 et son domaine de validité de la fonction  $u \mapsto \cos(u)$ .
  8. Montrer que la fonction  $I_n$  est développable en série entière au voisinage de 0 et déterminer le domaine de validité de ce développement.  
Chaque coefficient sera donné sous forme d'une intégrale et on citera avec précision les théorèmes utilisés.
  9. Quel résultat démontré antérieurement retrouve-t-on alors pour la fonction  $I_n$  ?

## FIN