**SESSION 2022** **PSI8M**

e3a POLYTECH

## ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

# MATHÉMATIQUES

**Durée : 4 heures**

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

***RAPPEL DES CONSIGNES***

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

**Les calculatrices sont interdites**

**Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.**

## EXERCICE 1

**1.** Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que, pour tout entier naturel $n$ non nul, on a :

$$\frac{3}{n(n+3)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{(n+3)}.$$

**2.** Déterminer le nombre réel $\alpha$ tel qu'il existe une variable aléatoire $X$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{P}(X = n) = \frac{3}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\,\alpha\,.$$

**3. Espérance et variance de $X$**

**3.1.** Après avoir justifié son existence, déterminer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ de la variable aléatoire $X$.
*On pourra utiliser l'égalité : $2 = (n+3) - (n+1)$ afin d'introduire un télescopage.*

**3.2.** Déterminer $\mathbb{E}(X(X+1))$.

**3.3.** En déduire la variance $\mathbb{V}(X)$ de la variable aléatoire $X$.

## EXERCICE 2

Soient $n$ un entier naturel non nul et $E_n = \mathbb{R}_n[X]$.

**1.** Soient $q$ un réel et $r$ un entier non nul. Donner, sans démonstration, une autre expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} q^k$.

**2.** Soit $p$ un entier non nul.
Déterminer, dans $\mathbb{R}[X]$, le reste et le quotient de la division euclidienne de $X^p - 1$ par $X - 1$.

**3.** Soit $P \in E_n$ .
Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q$ de $E_n$ tel que :

$$\forall\, x \neq 1, \ \ Q(x) = \frac{1}{x-1}\int_1^x P(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

On définit ainsi une application $f : P \mapsto Q$.

**4.** Prouver que $f$ est un endomorphisme de $E_n$ .

**5.** Montrer que $f$ est un automorphisme de $E_n$ et déterminer, pour tout $Q$ de $E_n$, le polynôme $f^{-1}(Q)$ à l'aide de $Q$ et de ses dérivées.

**6.** Soit $A$ la matrice de $f$ dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $E_n$ .
Déterminer $A$ et $A^{-1}$.

**7.** Déterminer les spectres des matrices $A$ et $A^{-1}$.

**8.** Les matrices $A$ et $A^{-1}$ sont-elles diagonalisables ?

**9.** Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine d'ordre de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ d'un polynôme $Q$ de $E_n$ .
À quelles conditions $\alpha$ est-il racine de $f^{-1}(Q)$ et avec quel ordre de multiplicité ?
*On pourra étudier les cas $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$.*

**10.** Déterminer les sous-espaces propres de $f^{-1}$.

**11.** Montrer que les sous-espaces propres de $f^{-1}$ sont aussi les sous-espaces propres de $f$.

# EXERCICE 3

**1. Question de cours**

Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et $T-$périodique.

Montrer que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int_x^{x+T} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u\,.$

* * * * * *

On se propose de déterminer des fonctions $y$ de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant, pour tout réel $x$, la relation :

$$x\,y''(x) + y'(x) - 4\,x\,y(x) = 0\,. \quad (**)$$

**2.** On suppose qu'il existe une fonction $g$, développable en série entière, de rayon de convergence non nul, vérifiant $(**)$, sous la forme $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$ et telle que $g(0) = a_0 = 1$.

**2.1.** Prouver que $a_1 = 0$ et déterminer pour tout $n \geqslant 1$ une relation entre $a_{n+1}$ et $a_{n-1}$.

**2.2.** Déterminer alors $a_n$ pour tout entier naturel $n$.

**2.3.** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g$ ainsi obtenue.

Soit $F$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \;\mapsto\; F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left(2x\cos(t)\right)\mathrm{d}t\,.$$

**3. Quelques propriétés de la fonction $F$**

**3.1.** Étudier la parité de la fonction $F$.

*On pourra utiliser le changement de variable $u = \pi - t$ et la question de cours.*

**3.2.** Pour tout couple $(x,t)$ de $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$, on pose $h(x,t) = \exp\left(2x\cos(t)\right)$.

**3.2.1.** Justifier que $h$ est $C^1$ sur $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$.

**3.2.2.** Prouver que pour $k$ non nul, la fonction $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}$ existe et est continue sur $\mathbb{R}\times[0,2\pi]$.

**3.2.3.** Soit $I$ un segment de $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout entier $k$ non nul, il existe un réel positif $M_k$ tel que :

$$\forall (x,t) \in I\times[0,2\pi],\ 0 \leqslant \left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| \leqslant M_k\,.$$

**3.2.4.** En déduire que $F$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

**3.2.5.** Donner pour tout $x$ réel et tout $k \in \mathbb{N}^*$ une expression de $F^{(k)}(x)$ sous la forme d'une intégrale.

**3.3.** Démontrer que $F$ vérifie la relation $(**)$.

4. **Développement en série entière de $F$**

**4.1.** Donner le développement en série entière au voisinage de zéro de la fonction exponentielle et son domaine de validité.

**4.2.** En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} I_n\, x^n$$

où $I_n$ s'exprime simplement à l'aide de l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.

*On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.*

**4.3.** Calculer $J_0$ et $J_1$.

**4.4.** Soit $n \geqslant 2$. Déterminer une relation de récurrence entre $J_n$ et $J_{n-2}$.

**4.5.** En déduire, pour tout entier naturel $n$, une expression de $J_n$ en fonction de $n$.

**4.6.** Comparer alors les fonctions $F$ et $g$.

## EXERCICE 4

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 2.
$\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$, à coefficients réels.
$O_n$ et $I_n$ sont respectivement la matrice nulle et la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On note enfin $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. **Question de cours**
Démontrer que $O_n(\mathbb{R})$ est stable pour la transposition et pour la multiplication matricielle.

* * * * * *

### Partie 1

2. Soient $A$ et $B$ deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda$ un réel.
On considère les matrices par blocs de taille $2n$ :

$$U = \begin{pmatrix} \lambda\, I_n & -B \\ -A & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0_n & \lambda I_n \end{pmatrix}.$$

**2.1.** Calculer $UV$ et $VU$.

**2.2.** Démontrer que $AB$ et $BA$ ont le même polynôme caractéristique.

3. Justifier que pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $M^T M$ est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique.

4. En déduire qu'il existe une matrice orthogonale $R \in O_n(\mathbb{R})$ telle que : $M^T M = R^T\, M M^T\, R$.

## Partie 2

On note $\Delta_n$ l'ensemble des matrices $M$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles il existe une matrice $Q$ dans $O_n(\mathbb{R})$ vérifiant : $Q^T\, M\, Q = M^T$. Une telle matrice $M$ sera dite *orthotransposable*.
On rappelle que si $\mathcal{S}_n$ est le sous-espace vectoriel des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et si $\mathcal{A}_n$ est le sous-espace vectoriel des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n\,.$$

**5.** Montrer que $\mathcal{S}_n$ est inclus dans $\Delta_n$ .

**6.** Démontrer que : $\forall\, A \in \mathcal{A}_n$ et $\forall\, Q \in O_n(\mathbb{R})$, $Q^{-1}AQ \in \mathcal{A}_n$ .

**7.** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
Prouver qu'il existe une matrice $T \in O_n(\mathbb{R})$, une matrice $D$ diagonale et une matrice $A \in \mathcal{A}_n$ telles que :

$$M = T(D + A)T^{-1}.$$

**8. Cas $n = 2$ : on démontre que toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est *orthotransposable***

**8.1.** Déterminer **toutes** les matrices **à la fois** orthogonales **et** diagonales de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

**8.2.** On considère le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ : $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix},\ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.
Déterminer alors une matrice $W$ orthogonale **et** diagonale telle que :

$$\forall L \in \mathcal{L},\ L^T = W^T L W.$$

**8.3.** En utilisant la question **7**, démontrer que toute matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est *orthotransposable*.

**9. On revient au cas général et on suppose à présent que $n$ est impair**
Pour toutes matrices $A$ et $B$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $[A, B] = AB - BA$.

**9.1.** Montrer que si $M \in \Delta_n$ , alors $[M^T, M]$ est semblable à son opposée.

**9.2.** En déduire que si $M \in \Delta_n$ , alors $\det\left([M^T, M]\right) = 0$.

# FIN