

SESSION 2022



PSI1M

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
 - Ne pas utiliser de correcteur.
 - Écrire le mot *FIN* à la fin de votre composition.
-

Les calculatrices sont interdites.

**Le sujet est composé de deux problèmes indépendants.
Chaque problème est constitué de parties indépendantes.**

PROBLÈME 1

Intégrales de Gauss et théorème de Moivre-Laplace

Présentation

Le théorème de Moivre-Laplace permet d'approcher les calculs de probabilité pour une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0; 1]$ par des calculs d'intégrales de fonctions gaussiennes. Une première démonstration a été donnée en 1733 par Abraham de Moivre pour le cas où $p = \frac{1}{2}$.

La **partie I** permet d'obtenir un résultat de convergence. La **partie II** aboutit à un calcul exact d'une intégrale de fonction gaussienne dite "intégrale de Gauss". La **partie III** permet d'établir une majoration utile à la **partie IV** qui s'intéresse à la convergence simple d'une suite de fonctions vers une fonction gaussienne. Ce résultat de convergence constitue une étape clé dans une démonstration possible du théorème de Moivre-Laplace.

Partie I - Convergence d'une suite

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on pose :

$$a_{k,n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \binom{2n}{k}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_m = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt.$$

Q1. Montrer que la suite $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Q2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m.$$

Q3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}} \quad \text{et} \quad I_{2n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n}.$$

Q4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}.$$

En déduire que :

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2n}} \leq 2\pi(a_{n,n})^2 \leq 1.$$

Q5. En déduire la convergence de la suite $(a_{n,n})_{n \geq 1}$ lorsque n tend vers l'infini, puis que :

$$I_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Partie II - Calcul d'une intégrale de Gauss

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on pose :

$$u_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq t \leq \sqrt{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Enfin, on considère l'intégrale de Gauss :

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

Q6. À l'aide d'un changement de variable simple, déduire de la **Q5** que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

Q7. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathbb{R}^+ et donner sa limite.

Q8. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + x \leq e^x$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, 0 \leq u_n(t) \leq e^{-t^2}.$$

Q9. Montrer que l'intégrale K est convergente, puis déduire des questions précédentes une valeur exacte de K .

Partie III - Calcul d'une majoration

Q10. Montrer qu'il existe une fonction $g: \left[0; \frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ et un réel $M \geq 0$, tels que :

$$\forall x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], \frac{1-x}{1+x} = e^{-2x+g(x)} \quad \text{et} \quad |g(x)| \leq Mx^3.$$

Indication : pour obtenir la majoration, on pourra écrire $g(x)$ sous forme d'intégrale.

Q11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \llbracket n+1; 2n \rrbracket$:

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{\prod_{i=1}^{k-n-1} \left(1 - \frac{i}{n}\right)}{\prod_{i=1}^{k-n-1} \left(1 + \frac{i}{n}\right)} \times \frac{n}{k}.$$

Q12. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1 \leq k \leq \frac{3n}{2} + 1$, il existe $b_{k,n} \in \mathbb{R}$ tel que

$$|b_{k,n}| \leq \frac{M}{n^3} (k - n - 1)^4 \text{ et :}$$

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{n}{k} \times e^{b_{k,n}} \times e^{-\frac{1}{n}(k-n-1)(k-n)}.$$

Partie IV - Vers le théorème de Moivre-Laplace

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \geq 1}$ définies sur un espace probabilisé (Ω, Σ, P) . On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(2n, \frac{1}{2}\right)$ et on pose :

$$Z_n = \frac{2X_n - 2n}{\sqrt{2n}}.$$

Pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on pose $t_{k,n} = \frac{2k - 2n}{\sqrt{2n}}$ et $J_{k,n} = \left[t_{k,n} - \frac{1}{\sqrt{2n}}, t_{k,n} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right]$. On admet que les intervalles $J_{k,n}$, pour $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, sont disjoints deux à deux et que :

$$\left[-\sqrt{2n} - \frac{1}{\sqrt{2n}} ; \sqrt{2n} + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right] = \bigcup_{k=0}^{2n} J_{k,n}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une fonction $h_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en escalier de la manière suivante :

$$h_n : t \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{2n}}{2} P(X_n = k) & \text{s'il existe } k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket \text{ tel que } t \in J_{k,n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Q13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z_n .

Q14. Proposer une représentation graphique de la fonction h_2 .

Q15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que la fonction h_n possède un maximum sur \mathbb{R} et déterminer pour quelles valeurs ce maximum est atteint.

Q16. Soit $x \in]0; +\infty[$. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifiant $n \geq n_0$, il existe $k_n \in \mathbb{N}$, tel que $x \in J_{k_n,n}$. Vérifier qu'alors :

$$k_n - n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x\sqrt{2n}}{2} ; \quad t_{k_n,n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x ; \quad k_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n.$$

Q17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que pour tout $k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$, $h_n(t_{k,n}) = a_{k,n}$. Montrer ensuite, en utilisant les résultats des **Q5**, **Q12**, **Q16**, que la suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathbb{R} et préciser sa limite.

La convergence simple de cette suite de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une étape importante permettant de démontrer un cas particulier du théorème de Moivre-Laplace :

Théorème

Pour tous réels $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, tels que $a < b$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(a \leq Z_n \leq b) = \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

PROBLÈME 2

Factorisation QR

Présentation

Ce problème s'intéresse dans la **partie I** à des propriétés des matrices de rang 1. Certaines de ces matrices sont ensuite utilisées dans la **partie II** pour construire des matrices orthogonales permettant dans la **partie III** de prouver l'existence d'une factorisation QR pour une matrice carrée quelconque.

Notations

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note $M_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{R} . L'ensemble des matrices réelles carrées de taille n est noté $M_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$: on note également A l'endomorphisme de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à X associe AX .

Pour tout $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, A^T désigne la matrice transposée de A .

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$, tel que $A^k = 0$.

L'ensemble $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. En identifiant $M_1(\mathbb{R})$ et \mathbb{R} , on a pour tous $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y \quad \text{et} \quad \|X\|^2 = \langle X, X \rangle .$$

On suppose dans tout ce problème que $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel vérifiant $n \geq 2$.

Partie I - Matrices de rang 1

I.1 - Une expression des matrices de rang 1

Q18. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tels que $A = XY^T$.

Q19. Réciproquement, soient $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Montrer que la matrice XY^T est de rang 1.

I.2 - Quelques propriétés

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

Q20. Montrer que $A^2 = \text{tr}(A)A$.

Q21. En déduire, par récurrence sur k , une expression de A^k en fonction de A pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q22. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit nilpotente.

Q23. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit diagonalisable.

Partie II - Matrices de Householder

II.1 - Un exemple

On définit :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

- Q24.** Calculer A^2 . En déduire un polynôme annulateur de A .
- Q25.** Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .
- Q26.** Montrer que les sous-espaces propres de A sont orthogonaux.
- Q27.** Déterminer une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$, telles que $P^T A P = D$.
- Q28.** Interpréter géométriquement l'endomorphisme A de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

II.2 - Matrices de Householder

Soit $V \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On définit $P_V, Q_V \in M_n(\mathbb{R})$ par :

$$P_V = \frac{1}{\|V\|^2} V V^T \quad \text{et} \quad Q_V = I_n - 2 \frac{1}{\|V\|^2} V V^T. \quad (1)$$

- Q29.** Montrer que $\text{Im } P_V = \text{Vect}(V)$ et que $\text{Ker } P_V = \text{Vect}(V)^\perp$.
- Q30.** Montrer que P_V est la projection orthogonale sur la droite $\text{Vect}(V)$.
Préciser le rang et la trace de la matrice P_V .
- Q31.** Montrer que Q_V est symétrique et orthogonale.
- Q32.** Montrer que Q_V est la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(V)^\perp$.

Partie III - Factorisation QR

III.1 - Un résultat préliminaire

Soient $U, V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que $\|U\| = \|V\|$. On note $D = \text{Vect}(U - V)$.

- Q33.** Montrer que D^\perp est l'ensemble des $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que $\|X - U\| = \|X - V\|$.
- Q34.** Donner la décomposition de U sur la somme directe $M_{n,1}(\mathbb{R}) = D \oplus D^\perp$.
- Q35.** On suppose U et V non colinéaires. Calculer $Q_{U-V} U$ où Q_{U-V} est définie en (1).
- Q36.** En déduire que pour tous $\tilde{U}, \tilde{V} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale Q , telle que $Q\tilde{U}$ est colinéaire à \tilde{V} .

III.2 - Factorisation QR

Q37. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q_1 , telle que Q_1A soit de la forme :

$$Q_1A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } C_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R}).$$

Q38. En raisonnant par récurrence sur n , montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale, telle que QA soit triangulaire supérieure.

FIN