ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARIS,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS,
CHIMIE PARISTECH - PSL.

Concours Mines-Télécom,
Concours Centrale-Supélec (Cycle International).

CONCOURS 2022

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - PC

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier

L'objectif de ce problème est l'étude asymptotique du nombre de partitions d'un entier naturel n, c'est-à-dire du nombre de décompositions de n en somme d'entiers naturels non nuls (sans tenir compte de l'ordre des termes). Une définition rigoureuse de ce nombre, noté p_n, est donnée en début de partie **C**. Dans la partie **A**, on introduit une fonction P de variable complexe ; dans la fin de la partie **C** on démontre qu'il s'agit de la somme, sur le disque unité ouvert complexe, de la série entière $\sum_{n\geq 0} p_n z^n$. Dans la partie **B**, on étudie P au voisinage de 1 en variable réelle. Cette étude est mise à profit, dans la partie **D**, pour obtenir une domination de bonne qualité de la suite (p_n).

Tout au long du problème, le disque unité ouvert de **C** sera noté

$$D = \{z \in \mathbf{C} : \ |z| < 1\}.$$

On admettra aussi l'identité classique suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

A. Fonctions L et P

1 ▷ Soit $z \in D$. Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}\cdot$ Préciser la valeur de sa somme lorsque $z \in \left]-1, 1\right[$. On notera

$$L(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}\cdot$$

2 ▷ Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Phi : t \mapsto L(tz)$ est dérivable sur un intervalle ouvert incluant $[-1, 1]$ et donner une expression simple de sa dérivée sur $[-1, 1]$.

3 ▷ Soit $z \in D$. Montrer que la fonction $\Psi : t \mapsto (1 - tz)\, e^{L(tz)}$ est constante sur $[0, 1]$, et en déduire que

$$\exp(L(z)) = \frac{1}{1 - z}\cdot$$

4 ▷ Montrer que $|L(z)| \leq -\ln(1 - |z|)$ pour tout z dans D.

En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} L(z^n)$ est convergente pour tout z dans D.

Dans la suite, pour tout $z \in D$ on note

$$P(z) := \exp\left[\sum_{n=1}^{+\infty} L(z^n)\right].$$

5 ▷ Soit $z \in D$. Vérifier que $P(z) \neq 0$, que

$$P(z) = \lim_{N \to +\infty} \prod_{n=1}^{N} \frac{1}{1 - z^n}$$

et que pour tout réel $t > 0$,

$$\ln P(e^{-t}) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1 - e^{-nt}).$$

B. Développement asymptotique en variable réelle

Dans cette partie, on introduit la fonction q qui à tout réel x associe le nombre réel $q(x) = x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2}$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

6 ▷ Montrer que q est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, qu'elle est 1-périodique et que la fonction $|q|$ est paire.

7 ▷ Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{e^{tu} - 1}\, du$ est bien définie pour tout réel $t > 0$.

8 ▷ Montrer que pour tout entier $n > 1$,

$$\int_1^n \frac{q(u)}{u}\, \mathrm{d}u = \ln(n!) + (n-1) - n\ln(n) - \frac{1}{2}\ln(n) = \ln\left(\frac{n!\, e^n}{n^n \sqrt{n}}\right) - 1.$$

9 ▷ Montrer que $\displaystyle\int_{\lfloor x \rfloor}^{x} \frac{q(u)}{u}\, du$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, et en déduire la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\, du$, ainsi que l'égalité

$$\int_1^{+\infty} \frac{q(u)}{u}\, \mathrm{d}u = \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

10 ▷ À l'aide d'un développement en série sous l'intégrale, montrer que

$$\int_0^{+\infty} \ln(1 - e^{-u})\, \mathrm{d}u = -\frac{\pi^2}{6}\cdot$$

11 ▷ Montrer que

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1 - e^{-tu}}{t}\right) \mathrm{d}u \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} -1.$$

On pourra commencer par établir que $x \mapsto \frac{1-e^{-x}}{x}$ *est décroissante sur* $\mathbf{R}_+^*$.

Pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $t \in \mathbf{R}_+$, on pose

$$u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{tq(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u \quad \text{si } t > 0, \quad \text{et} \quad u_k(t) = \int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{q(u)}{u}\,\mathrm{d}u \quad \text{si } t = 0.$$

12 ▷ Montrer que u_k est continue sur $\mathbf{R}_+$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

13 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+^*$. Montrer successivement que $|u_k(t)| = \displaystyle\int_{k/2}^{(k+1)/2} \frac{t\,|q(u)|}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u$

puis $u_k(t) = (-1)^k |u_k(t)|$ pour tout entier $k \geq 1$, et établir enfin que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \left| \sum_{k=n}^{+\infty} u_k(t) \right| \leq \frac{1}{2n}\cdot$$

On admettra dans la suite que cette majoration vaut encore pour $t = 0$.

14 ▷ En déduire que

$$\int_1^{+\infty} \frac{t\,q(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \frac{\ln(2\pi)}{2} - 1.$$

15 ▷ Montrer, pour tout réel $t > 0$, l'identité

$$\int_1^{+\infty} \frac{t\,q(u)}{e^{tu}-1}\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{2}\ln(1-e^{-t}) - \ln P(e^{-t}) - \int_1^{+\infty} \ln(1-e^{-tu})\,\mathrm{d}u.$$

16 ▷ Conclure que

$$\ln P(e^{-t}) = \frac{\pi^2}{6t} + \frac{\ln(t)}{2} - \frac{\ln(2\pi)}{2} + o(1) \quad \text{quand } t \text{ tend vers } 0^+.$$

C. Développement de P en série entière

Pour $(n, N) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$, on note $P_{n,N}$ l'ensemble des listes $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbf{N}^N$ telles que $\sum\limits_{k=1}^{N} k a_k = n$. Si cet ensemble est fini, on note $p_{n,N}$ son cardinal.

17 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que $P_{n,N}$ est inclus dans $[\![0, n]\!]^N$ et non vide pour tout $N \in \mathbf{N}^*$, que la suite $(p_{n,N})_{N\geq 1}$ est croissante et qu'elle est constante à partir du rang $\max(n, 1)$.

Dans toute la suite, on notera p_n la valeur finale de $(p_{n,N})_{N\geq 1}$.

18 ▷ Soit $N \in \mathbf{N}^*$. Donner une suite $(a_{n,N})_{n\in\mathbf{N}}$ telle que

$$\forall z \in D,\ \frac{1}{1-z^N} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,N} z^n.$$

En déduire, par récurrence, la formule

$$\forall N \in \mathbf{N}^*,\ \forall z \in D,\ \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{1-z^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n.$$

19 ▷ On fixe $\ell \in \mathbf{N}$ et $x \in [0,1[$. En utilisant le résultat de la question précédente, établir la majoration $\sum_{n=0}^{\ell} p_n x^n \leq P(x)$. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_n p_n z^n$.

20 ▷ Soit $z \in D$. En examinant la différence $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,N} z^n$, démontrer que

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n.$$

21 ▷ Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que pour tout réel $t > 0$,

$$p_n = \frac{e^{nt} P(e^{-t})}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\theta} \frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\, \mathrm{d}\theta. \tag{1}$$

Dans le reste du problème, l'objectif est d'utiliser la formule (1) pour obtenir un contrôle assez fin du nombre p_n lorsque n tend vers $+\infty$.

D. Contrôle de P

22 ▷ Soit $x \in [0,1[$ et $\theta \in \mathbf{R}$. En utilisant la fonction L, montrer que

$$\left|\frac{1-x}{1-xe^{i\theta}}\right| \leq \exp\Big(-(1-\cos\theta)\, x\Big).$$

En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ et tout réel θ,

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{1-x} + \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big)\right).$$

23 ▷ Soit $x \in [0,1[$ et θ un réel. Montrer que

$$\frac{1}{1-x} - \mathrm{Re}\Big(\frac{1}{1-xe^{i\theta}}\Big) \geq \frac{x(1-\cos\theta)}{(1-x)\Big((1-x)^2+2x(1-\cos\theta)\Big)}.$$

En déduire que si $x \geq \frac{1}{2}$ alors

$$\left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1-\cos\theta}{6(1-x)^3}\right) \quad \text{ou} \quad \left|\frac{P(xe^{i\theta})}{P(x)}\right| \leq \exp\left(-\frac{1}{3(1-x)}\right).$$

Pour ce dernier résultat, on distinguera deux cas selon les valeurs relatives de $x(1-\cos\theta)$ *et* $(1-x)^2$.

24 ▷ Montrer qu'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que

$$\forall \theta \in [-\pi,\pi],\ 1-\cos\theta \geq \alpha\,\theta^2.$$

En déduire qu'il existe trois réels $t_0 > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$ tels que, pour tout $t \in]0,t_0]$ et tout $\theta \in [-\pi,\pi]$,

$$\left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right| \leq e^{-\beta(t^{-3/2}\theta)^2} \quad \text{ou} \quad \left|\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\right| \leq e^{-\gamma(t^{-3/2}|\theta|)^{2/3}}.$$

25 ▷ En déduire que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\frac{\pi^2\theta}{6t^2}}\,\frac{P(e^{-t}e^{i\theta})}{P(e^{-t})}\,\mathrm{d}\theta = O(t^{3/2}) \quad \text{quand } t \text{ tend vers } 0^+.$$

E. Conclusion

26 ▷ En prenant $t = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}$ dans (1), conclure que

$$p_n = O\left(\frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{n}\right) \quad \text{quand } n \text{ tend vers } +\infty.$$

Épilogue. Le dernier résultat est très proche de l'optimalité. Par une analyse plus fine de l'intégrale dans la formule (1), on peut en effet établir l'équivalent

$$p_n \sim \frac{\exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)}{4\sqrt{3}\,n} \quad \text{quand } n \to +\infty,$$

formule découverte par Hardy et Ramanujan en 1918.

Fin du problème