

**ECOLE POLYTECHNIQUE  
ECOLE NORMALES SUPERIEURES**

**CONCOURS D'ADMISSION 2022**

**LUNDI 25 AVRIL 2022  
08h00 - 12h00**

**FILIERE MP - Epreuve n° 1**

**MATHEMATIQUES A (XLSR)**

***Durée : 4 heures***

***L'utilisation des calculatrices n'est pas  
autorisée pour cette épreuve***

## - NOTATIONS ET RAPPELS

- Dans tout le problème,  $p$  désigne un entier *strictement positif*.

• On note  $\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels. Pour tous entiers  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{N}$  tels que  $a \leq b$ , on note  $\llbracket a, b \rrbracket = \{n \in \mathbb{N} \mid a \leq n \leq b\}$ .

On note  $\mathfrak{S}_p$  le groupe des permutations de l'ensemble fini  $\llbracket 1, p \rrbracket$  muni de la composition.

On note  $\epsilon : \mathfrak{S}_p \rightarrow \{-1, +1\}$  l'application signature, définie comme l'unique morphisme de groupes de  $(\mathfrak{S}_p, \circ)$  dans  $(\{-1, +1\}, \times)$  qui vaut  $-1$  sur toutes les transpositions.

- On note  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées de taille  $p \times p$ .

Pour tout  $(x_1, \dots, x_p) \in (\mathbb{R}^p)^p$ , on appelle produit mixte de  $(x_1, \dots, x_p)$  la quantité

$$[x_1, \dots, x_p] = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^p x_{\sigma(i), i}$$

où pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on a noté  $x_j = (x_{i,j})_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{R}^p$ . En particulier, si on note  $(x_1 | \dots | x_p)$  la matrice de taille  $p \times p$  élément de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  dont les colonnes sont données par les vecteurs  $x_1, \dots, x_p$ , on a donc l'égalité  $[x_1, \dots, x_p] = \det((x_1 | \dots | x_p))$  où  $\det$  est le déterminant usuel.

• Si  $F$  et  $G$  sont deux  $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels, on dit que  $f : F^p \rightarrow G$  est  $p$ -linéaire alternée si pour tout  $u = (u_1, \dots, u_p) \in F^p$  et tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , l'application

$$y \mapsto f(u_1, \dots, u_{i-1}, y, u_{i+1}, \dots, u_p)$$

de  $F$  dans  $G$  est linéaire et pour tout  $\sigma \in \mathfrak{S}_p$  on a

$$f(u \cdot \sigma) = \epsilon(\sigma) f(u)$$

où  $u \cdot \sigma = (u_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq p}$ .

On notera  $\mathcal{A}_p(F, G)$  l'ensemble des applications  $p$ -linéaires alternées de  $F^p$  dans  $G$ .

• Dans tout le problème, on considère un espace euclidien  $E$  de dimension  $d \geq 1$  muni de son produit scalaire  $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ . On note pour  $x \in E$ ,  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$  la norme associée.

---

• Pour tout entier  $q$  non nul, et toute famille  $(u_1, \dots, u_q)$  d'éléments de  $E$ ,  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_q)$  désigne le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $u_1, \dots, u_q$ .

• Pour tous  $u = (u_1, \dots, u_p)$  et  $v = (v_1, \dots, v_p)$  dans  $E^p$ , on note  $\text{Gram}(u, v)$ , la matrice carrée de  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  définie pour tous  $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$  par

$$\text{Gram}(u, v)_{i,j} = \langle u_i, v_j \rangle.$$

## - PARTIE I

Soient  $V$  et  $V'$  deux sous-espaces de  $E$  de dimension  $p$  (on rappelle que  $p \geq 1$ ).

- (1) (a) Montrer qu'il existe  $u_1 \in V$  et  $u'_1 \in V'$  de norme 1 tels que

$$\langle u_1, u'_1 \rangle = \sup\{ \langle a, a' \rangle \mid (a, a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1 \}.$$

- (b) Étendre ce résultat en montrant qu'il existe une famille  $u = (u_1, \dots, u_p)$  de vecteurs de  $V$  et une famille  $u' = (u'_1, \dots, u'_p)$  de vecteurs de  $V'$  telles que  $u$  et  $u'$  soient orthonormées et vérifient les deux conditions suivantes :

- (i) Pour  $k = 1$ , on a

$$\langle u_1, u'_1 \rangle = \sup\{ \langle a, a' \rangle \mid (a, a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1 \}.$$

- (ii) Pour  $k \in \llbracket 2, p \rrbracket$ , on a

$$\langle u_k, u'_k \rangle = \sup\{ \langle a, a' \rangle \mid (a, a') \in V \times V', \|a\| = \|a'\| = 1,$$

$$\langle a, u_l \rangle = \langle a', u'_l \rangle = 0 \text{ pour tout } l \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket \}.$$

(Indication : On pourra construire les vecteurs  $u_k$  et  $u'_k$  par récurrence sur l'entier  $k$ .)

On fixe deux telles familles  $u$  et  $u'$  dans le reste de la partie I.

- (2) Montrer que si  $\dim(V \cap V') \geq 1$ , on a  $u_k = u'_k$  pour tout  $1 \leq k \leq \dim(V \cap V')$ .

- (3) (a) Montrer que  $u$  est une base orthonormée de  $V$ .

- (b) Montrer que pour  $k \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$ , on a  $u'_k \in \text{Vect}(u_{k+1}, \dots, u_p)^\perp$ .

(Indication : On pourra considérer l'application  $t \mapsto u_k(t) = \frac{u_k + tu_l}{\|u_k + tu_l\|}$  pour tous  $t \in \mathbb{R}$  et  $l \in \llbracket k+1, p \rrbracket$  ainsi que sa dérivée.)

- (c) Montrer que  $u_{k+1} \in (\text{Vect}(u_1, \dots, u_k) + \text{Vect}(u'_1, \dots, u'_k))^\perp$  pour tout  $k$  élément de  $\llbracket 1, p-1 \rrbracket$ .

- (d) En déduire que les sous-espaces  $W_k = \text{Vect}(u_k, u'_k)$  pour  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  sont orthogonaux deux à deux.

- (4) (a) Montrer qu'il existe  $0 \leq \theta_1 \leq \dots \leq \theta_p \leq \pi/2$  tel que  $\cos(\theta_k) = \langle u_k, u'_k \rangle$  pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .

- (b) Calculer la valeur de  $\det(\text{Gram}(u, u'))$  en fonction des  $\cos(\theta_k)$ .

- (c) En déduire que  $\det(\text{Gram}(u, u')) \leq 1$ . Que dire sur  $V$  et  $V'$  dans le cas d'égalité ?

## - PARTIE II

Pour tout  $e \in E^p$ , on considère  $\Omega_p(e) : E^p \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $u \in E^p$  par

$$\Omega_p(e)(u) = \det(\text{Gram}(e, u)).$$

- (5) (a) Vérifier que l'application  $(x_1, \dots, x_p) \mapsto [x_1, \dots, x_p]$  appartient à  $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$ .
- (b) Vérifier que si  $F$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  et si  $f : F \rightarrow \mathbb{R}^p$  est linéaire, alors  $g : F^p \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour  $u = (u_1, \dots, u_p) \in F^p$  par  $g(u) = [f(u_1), \dots, f(u_p)]$  est un élément de  $\mathcal{A}_p(F, \mathbb{R})$ .
- (6) (a) Montrer que pour tout  $e \in E^p$ , on a  $\Omega_p(e) \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ .
- (b) Vérifier que pour tout  $(e, u) \in E^p \times E^p$ , on a  $\Omega_p(e)(u) = \Omega_p(u)(e)$ .
- (c) Montrer que  $\Omega_p \in \mathcal{A}_p(E, \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R}))$ .
- (7) (a) Soient  $M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ ,  $e = (e_1, \dots, e_p)$  et  $e' = (e'_1, \dots, e'_p)$  dans  $E^p$  vérifiant  $e'_i = \sum_{j=1}^p M_{ij} e_j$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Montrer que  $\Omega_p(e') = \det(M) \Omega_p(e)$ .
- (b) Soit  $e \in E^p$ . Montrer que  $\Omega_p(e) \neq 0$  si et seulement si  $e$  est une famille libre.
- (c) Vérifier que  $\Omega_p(e)(e) \geq 0$  pour toute famille  $e \in E^p$ .

Dans la suite pour tout  $e \in E^p$ , on appelle  $p$ -volume de  $e$  la quantité

$$\text{vol}_p(e) = \sqrt{\Omega_p(e)(e)} = (\det(\text{Gram}(e, e)))^{1/2}.$$

- (8) (a) Calculer  $\text{vol}_p(b)$  lorsque  $b = (b_1, \dots, b_p)$  est une famille orthonormée de vecteurs de  $E$ .
- (b) On suppose ici que  $p \geq 2$ . Soit  $e = (e_1, \dots, e_p) \in E^p$ . On note par la projection orthogonale sur l'orthogonal de l'espace engendré par la famille  $e_2^p = (e_2, \dots, e_p)$ . Montrer que  $\text{vol}_p(e) = \|\text{pr}(e_1)\| \text{vol}_{p-1}(e_2^p)$ .
- (c) Pour toute famille libre  $e = (e_1, \dots, e_p) \in E^p$ , montrer que  $\text{vol}_p(e) \leq \prod_{i=1}^p \|e_i\|$  avec égalité si et seulement si  $e$  est une famille de vecteurs orthogonaux 2 à 2.
- (9) (a) Montrer que si  $e \in E^p$  est une famille libre et si  $b \in E^p$  est une base orthonormée de  $\text{Vect}(e)$ , alors  $\text{vol}_p(e) = |\det(P_b^e)|$  où  $P_b^e$  est la matrice de passage de  $b$  à  $e$  i.e.  $e_j = \sum_{i=1}^p (P_b^e)_{ij} b_i$  pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ .
- (b) Montrer que pour tous  $e, e' \in E^p$ , on a  $|\Omega_p(e)(e')| \leq \text{vol}_p(e) \text{vol}_p(e')$ .

## - PARTIE III

Soient  $e = (e_1, \dots, e_d)$  une base orthonormée de  $E$ ,  $p$  un entier tel que  $1 \leq p \leq d$  et  $\mathcal{I}_p = \{\alpha = (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{N}^p \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq d\}$ .

Pour tout  $\alpha = (i_1, \dots, i_p) \in \mathcal{I}_p$ , on note  $e_\alpha = (e_{i_1}, \dots, e_{i_p}) \in E^p$  et pour tous  $\omega$  et  $\omega'$  éléments de  $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$

$$(1) \quad \langle \omega, \omega' \rangle = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha) \omega'(e_\alpha).$$

(10) (a) Montrer que pour tout  $\omega \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ , on a  $\omega = \sum_{\alpha \in \mathcal{I}_p} \omega(e_\alpha) \Omega_p(e_\alpha)$ .

(b) En déduire que  $(\omega, \omega') \mapsto \langle \omega, \omega' \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$  pour lequel  $(\Omega_p(e_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{I}_p}$  est une base orthonormée de  $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$  et donner la dimension de  $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ .

(c) Construire dans le cas  $p = d - 1$  une isométrie entre  $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$  et  $E$ .

(11) On considère  $u, v \in E^p$ . Montrer que

$$\Omega_p(u)(v) = \langle \Omega_p(u), \Omega_p(v) \rangle.$$

(12) Montrer que le produit scalaire  $(\omega, \omega') \mapsto \langle \omega, \omega' \rangle$  défini par (1) ne dépend que du produit scalaire sur  $E$  et non du choix de la base orthonormée  $e$ .

## - PARTIE IV

Soit  $p \in \llbracket 1, d \rrbracket$ . On définit une relation sur l'ensemble des bases d'un sous-espace  $V$  de dimension  $p$  de  $E$  par :  $e$  et  $e'$  sont en relation si  $\det_e(e') > 0$  où  $\det_e(e')$  est le déterminant de  $e'$  dans la base  $e$ . On admet que cette relation est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases de  $V$  pour laquelle il existe exactement deux classes d'équivalence appelées orientations de  $V$ . Un sous-espace orienté est un couple  $(V, C)$  où  $C$  est une orientation de  $V$ .

On note  $\widetilde{\text{Gr}}(p, E)$  l'ensemble des sous-espaces orientés de dimension  $p$  de  $E$ .

(13) (a) Montrer que si  $e$  et  $e'$  sont deux familles libres de cardinal  $p$  de  $E$  alors  $\Omega_p(e)$  et  $\Omega_p(e')$  sont colinéaires si et seulement si  $\text{Vect}(e) = \text{Vect}(e')$ .

(b) Montrer que pour tout sous-espace vectoriel orienté  $(V, C)$  de dimension  $p$  de  $E$ , il existe une unique  $\Psi(V, C) \in \mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$  tel que pour tout  $e \in C$  on a  $\Omega_p(e) = \text{vol}_p(e) \Psi(V, C)$ .

- (14) On munit  $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$  du produit scalaire introduit dans la partie III.
- (a) Vérifier que  $\Psi : (V, C) \mapsto \Psi(V, C)$  est une injection de  $\widetilde{\text{Gr}}(p, E)$  dans la sphère de rayon 1 de  $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ .
  - (b) Montrer que  $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$  est une partie compacte de  $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$ .
- (15) Montrer que  $\Psi(\widetilde{\text{Gr}}(p, E))$  est une partie connexe par arcs de  $\mathcal{A}_p(E, \mathbb{R})$  si et seulement si  $p \leq d - 1$ . (*Indication : On pourra utiliser la question 3d.*)

\* \* \*