SESSION 2022 **MP8M**

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

1. Pour tout réel x, on pose, lorsque cela est possible, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1.1. Déterminer l'ensemble de définition Δ de Γ.

1.2. Démontrer que pour tout réel x de Δ, $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$.

1.3. On admet que $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Calculer $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right)$ pour tout entier naturel n. On exprimera le résultat à l'aide de factorielles.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{2n}\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t$.

2.1. Justifier l'existence de I_n.

2.2. En utilisant la question **1.** calculer I_n.

3. Pour tout réel x, on pose, lorsque cela est possible, $H(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(xt)\exp\left(-t^2\right)\mathrm{d}t$.

3.1. Donner le développement en série entière de la fonction cos au voisinage de 0 et préciser son domaine de validité.

3.2. Justifier que H est définie sur $\mathbb{R}$ et l'exprimer à l'aide de fonctions usuelles.

On citera les théorèmes utilisés en s'assurant que toutes leurs hypothèses sont bien vérifiées.

4. On se propose de retrouver le résultat établi à la question **3.2.** par une autre méthode.

4.1. Démontrer que H est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

4.2. Montrer que H est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

4.3. Retrouver l'expression de H obtenue à la question **3.2**.

EXERCICE 2

1. Questions de cours

1.1. Soit f une fonction continue sur le segment $[a,b]$.

Donner, sans démonstration, la limite quand n tend vers l'infini de l'expression :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

1.2. Soit $m \in \mathbb{N}$. Déterminer en fonction de m la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\left(\frac{j}{n}\right)^m$.

1.3. Soit n un entier non nul. Donner, sans démonstration, l'espérance d'une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

* * * * * *

Soient k et n deux éléments de $\mathbb{N}^*$. On dispose de k urnes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n.
On tire une boule au hasard de chaque urne et on désigne par X_n la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus. On suppose que les tirages sont indépendants les uns des autres.

2. Donner l'ensemble J des valeurs prises par X_n.

3. Soit $j \in J$. Évaluer $\mathbb{P}(X_n \leqslant j)$ et prouver que l'on a : $\mathbb{P}(X_n = j) = \dfrac{j^k - (j-1)^k}{n^k}$.

4. Démontrer que l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n peut s'écrire :

$$\mathbb{E}(X_n) = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n > j).$$

5. Calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.

6. Lorsque $k = 1$, reconnaître la loi de X_n et vérifier la cohérence du résultat obtenu à la question précédente.

EXERCICE 3

Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $(\,|\,)$ dont la norme est notée $\|\ \|$.

1. Questions de cours

1.1. Soient x et y deux vecteurs de E. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $|(x|y)| \leqslant \|x\|\,\|y\|$.
On pourra utiliser la fonction $t \mapsto \|x + t\,y\|^2$.

1.2. Démontrer qu'on a l'égalité $|(x|y)| = \|x\|\,\|y\|$ **si, et seulement si,** les vecteurs x et y sont colinéaires.

1.3. On considère $E = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de sa base canonique et du produit scalaire canonique $(X|Y) = X^T Y$.

Écrire cette inégalité pour $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

* * * * * *

Pour toute la suite de l'exercice, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Partie 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note $B = \{X \in \mathbb{R}^n,\ \|X\| \leqslant 1\}$.
On considère l'application F de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall\, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\quad F(X) = \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} x_i\, x_j$$

Par exemple, pour $n = 3$, on a $F\,(X) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_1 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_3x_2 = 2\,(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$.

2. Exprimer alors $F(X)$ à l'aide de $S_1(n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ et de $S_2(n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

3. Montrer que F possède un maximum sur B que l'on notera M.

4. Montrer en utilisant la question **1.** que $M = n - 1$.

5. Déterminer tous les $X \in \mathbb{R}^n$ tels que $F(X) = M$.

Partie 2

On note $\mathscr{B} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique orthonormale pour le produit scalaire $(X|Y) = X^T Y$ de $\mathbb{R}^n$.

Pour tout couple de vecteurs (X, Y) de $\mathbb{R}^n$ décomposés dans la base $\mathscr{B}$: $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, on pose :

$$\varphi\,(X, Y) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n \\ i\neq j}} \left(x_iy_j + x_jy_i\right).$$

Par exemple, pour $n = 3$, on a $\varphi\,(X, Y) = x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2$.

6. Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ exprimer $F(X)$ à l'aide de φ.

7. Écrire la matrice $A = \left(a_{ij}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ par $a_{ij} = \varphi\left(e_i, e_j\right)$.

8. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathcal{U} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ constituée de vecteurs propres de la matrice A.

9. Vérifier que pour tout couple de vecteurs (X, Y) de $(\mathbb{R}^n)^2$, on a $\varphi\,(X, Y) = Y^T AX = X^T AY$.

10. Soit J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.

10.1. Déterminer les valeurs propres de la matrice J.

10.2. En déduire une matrice diagonale Δ semblable à la matrice A.

11. Donner l'expression de $\varphi(X, Y)$ en fonction des coordonnées de X et Y dans la base $\mathcal{U}$.

12. Retrouver alors le résultat établi à la question **4.**

EXERCICE 4

Questions préliminaires

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note : $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$ où i est un nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que $|z| = 1$ si, et seulement si, $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

2. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Déterminer $r \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $\overline{\omega^k} = \omega^r$.

3. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k$ et $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \omega^k$.

4. On considère le polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, X^{k-1}$.

4.1. Montrer que pour tout réel x différent de 1 : $P(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$.

4.2. Montrer que : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $P(\omega^k) = \dfrac{n}{\omega^k - 1}$.

4.3. En factorisant $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$, montrer que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \omega^k\right) = n$.

******

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4.
On note F et A les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définies par :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = P(F)$$

où P est le polynôme défini à la question **4**.

5. Réduction de la matrice F

5.1. Donner, sans démonstration, la matrice F^k pour $k \in [\![2, n-2]\!]$, F^{n-1} puis F^n.
On pourra étudier le cas $n = 4$ et/ou l'endomorphisme f canoniquement associé à F pour conjecturer les résultats.

5.2. On note G_F le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par la famille $\left(F^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.
Montrer que G_F est de dimension n. En donner une base.

5.3. Démontrer que $X^n - 1$ est le polynôme minimal de F.

5.4. Justifier que F est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et donner une matrice diagonale D semblable à F.

6. Réduction de la matrice A

6.1. Expliciter la matrice A.

6.2. Déterminer une matrice Δ diagonale semblable à la matrice A.

6.3. Déterminer le degré du polynôme minimal de A.
En déduire que $\left(I_n, A, ..., A^{n-1}\right)$ est une famille libre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

7. Calculer le déterminant de A. Justifier que la matrice A est inversible.

8. Soit G_A le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par la famille $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$.
Vérifier que $A^{-1} \in G_A$.

9. Montrer que $G_A = G_F$.

10. Vérifier que l'on a l'égalité : $A\ (F - I_n)^2 = n\ (F - I_n)$.

11. Déterminer enfin une expression de A^{-1} à l'aide des puissances de la matrice F.

FIN