

SESSION 2021



PSI8M

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

## RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

**Les calculatrices sont interdites.**

**Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.**

## Exercice 1

On note  $F$  l'espace vectoriel des fonctions définies sur  $J = ]-1, +\infty[$  à valeurs réelles.  
Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $k \in \llbracket -1, p \rrbracket$ , on définit les fonctions  $f_k$  sur  $J$  par :

$$\forall x \in J, f_{-1}(x) = \ln(1+x) \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, p \rrbracket, f_k(x) = \frac{1}{(1+x)^k}.$$

### 1. Étude du sous-espace vectoriel engendré par ces fonctions

1.1. Soient  $(a_k)_{k \in \llbracket -1, p \rrbracket}$  des réels tels que  $\sum_{k=-1}^p a_k f_k$  est la fonction nulle.

Démontrer que  $a_{-1} = 0$ .

1.2. Démontrer alors que la famille  $\mathcal{B} = (f_k)_{k \in \llbracket -1, p \rrbracket}$  est libre.

On note  $E = \text{Vect}(\mathcal{B})$ .

1.3. En déduire la dimension de  $E$ .

2. On note  $u$  l'application qui à toute fonction  $f$  de  $E$  associe la fonction  $g$  définie sur  $J$  par :

$$\forall x \in J, g(x) = (1+x)f'(x).$$

2.1. Déterminer, pour tout  $k \in \llbracket -1, p \rrbracket$ , les images de  $f_k$  par  $u$ .

2.2. Vérifier que  $u$  est un endomorphisme de  $E$ .

2.3. Déterminer le noyau et l'image de  $u$ .

2.4. Préciser  $u^{-1}(\{f_{-1}\})$ , l'ensemble des antécédents de  $f_{-1}$ .

2.5. Déterminer la matrice  $M$  de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

2.6. L'endomorphisme  $u$  est-il diagonalisable ?

2.7. L'endomorphisme  $u^2$  est-il diagonalisable ?

3. Résoudre sur  $J$  l'équation différentielle (ED)  $f_{-1}(t) = (1+t)y'(t)$ .

4. Soit  $h_2$  la solution de l'équation différentielle (ED) nulle en zéro.

4.1. On note  $h_3$  la solution de l'équation différentielle  $h_2(t) = (1+t)y'(t)$  nulle en zéro.  
Expliciter  $h_3$ .

4.2. En itérant le procédé, on note pour tout entier naturel  $k \geq 2$ ,  $h_k$  la solution nulle en zéro de l'équation différentielle  $h_{k-1}(t) = (1+t)y'(t)$ .  
Expliciter  $h_k$ .

5. Étude de la série de fonction  $\sum_{k \geq 2} h_k$

5.1. Montrer que la série de fonctions  $\sum_{k \geq 2} h_k$  converge simplement sur  $J$  et calculer sa somme  $H$ .

5.2. La fonction  $H$  est-elle dans  $E$  ?

5.3. En utilisant la question 5.1, vérifier que  $H$  est dérivable et que  $H' \in E$ .

## Exercice 2

On note  $S$  l'ensemble des suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. On note  $\gamma$  la racine positive du trinôme  $x^2 - x - 1$ .

Justifier que  $\gamma > 1$  et que la deuxième racine est  $-\frac{1}{\gamma}$ .

2. On considère la suite réelle  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $S$  vérifiant :  $y_0 = 0, y_1 = 1$ .

Parmi les réponses proposées, une seule est l'expression correcte de  $y_n$  valable pour tout entier naturel  $n$ . Laquelle ?

$$(1) y_n = \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^{n+1} \sqrt{5}}; \quad (2) y_n = \frac{(-1)^{n+1} \gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\gamma^n \sqrt{5}}; \quad (3) y_n = \frac{\gamma^n}{\sqrt{5}} + \frac{(-1)^{n+1}}{\gamma^n \sqrt{5}}.$$

3. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires définie par :

- $X_0$  et  $X_1$  sont indépendantes et suivent toutes les deux une loi de Poisson de paramètres respectifs  $\lambda > 0$  et  $\mu > 0$ ;
- pour tout entier naturel  $n$  :  $X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$ .

3.1. Montrer que la variable aléatoire  $X_2$  suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.

3.2. Démontrer que les deux variables aléatoires  $X_1$  et  $X_2$  ne sont pas indépendantes.

3.3. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n = y_{n-1} X_0 + y_n X_1$ .

3.4. **Étude de l'espérance de la variable aléatoire  $X_p$  pour  $p \in \mathbb{N}$**

3.4.1. Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Justifier que la variable aléatoire  $X_p$  possède une espérance que l'on notera  $x_p$  et la calculer en fonction de  $\lambda, \mu$  et de termes de la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

3.4.2. Déterminer un équivalent de  $x_p$  lorsque  $p$  tend vers l'infini.

3.5. Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Justifier que la variable aléatoire  $X_p$  possède une variance que l'on notera  $\mathbb{V}(X_p)$  et la calculer en fonction de  $\lambda, \mu$  et de termes de la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

3.6. Soient  $p$  et  $q$  deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

Calculer, en fonction de  $\lambda, \mu$  et de termes de la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la covariance  $\text{Cov}(X_p, X_q)$  des deux variables aléatoires  $X_p$  et  $X_q$ .

Que peut-on en conclure ?

## Exercice 3

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose :  $I_n = \int_1^{+\infty} \exp(-t^n) dt$ .

1. Justifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'existence de  $I_n$ .

2. En citant précisément le théorème utilisé, justifier l'existence et déterminer la limite de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

3. En le justifiant, effectuer le changement de variable  $u = t^n$  dans  $I_n$ .

4. Déterminer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$ .

On donnera le résultat en fonction d'une intégrale  $J$  que l'on ne cherchera pas à calculer.

5. En déduire un équivalent de  $I_n$  au voisinage de  $+\infty$  en fonction de  $J$ .

6. On considère la série entière  $\sum_{n \geq 1} I_n x^n$ .

6.1. Déterminer le rayon de convergence  $R$  de cette série entière.

6.2. On pose pour tout  $x$  réel et lorsque cela est possible  $f(x) = \sum_{n \geq 1} I_n x^n$ .

Donner l'ensemble de définition de  $f$ .

## Exercice 4

Soient  $E$  un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \geq 1$ ,  $u$  un endomorphisme de  $E$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$   $m$  nombres complexes distincts deux à deux.

1. On suppose que  $u$  est diagonalisable et que son spectre est  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ .

On rappelle que dans ce cas,  $E = \bigoplus_{j=1}^m E_j$  où chaque  $E_j$  est le sous-espace propre associé à la valeur propre  $\lambda_j$ .

Montrer qu'il existe des projecteurs de  $E$ ,  $(p_j)_{j \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  non nuls, tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, u^k = \sum_{j=1}^m \lambda_j^k p_j \quad (*).$$

2. Dans cette question, on ne suppose plus  $u$  diagonalisable.

On suppose cependant qu'il existe une suite d'endomorphismes  $(p_j)_{j \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  de  $E$ , non nuls et que la suite de scalaires  $(\lambda_j)_{j \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  vérifie (\*).

2.1. Vérifier que l'on a :  $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(u) = \sum_{j=1}^m P(\lambda_j) p_j$ .

2.2. Montrer que  $u$  est diagonalisable.

On pourra chercher un polynôme annulateur de  $u$  scindé à racines simples.

2.3. Pour tout  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , on considère le polynôme  $L_j(X) = \prod_{k=1, k \neq j}^m \frac{X - \lambda_k}{\lambda_j - \lambda_k}$ .

2.3.1. Déterminer, pour tout couple  $(i, j) \in \llbracket 1, m \rrbracket^2$ ,  $L_j(\lambda_i)$ .

2.3.2. Prouver que la famille  $\mathcal{B} = (L_j)_{j \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  est une base de  $\mathbb{C}_{m-1}[X]$ .

2.3.3. Soit  $P \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$ . Déterminer les composantes de  $P$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

2.4. Prouver que l'on a :  $\forall j \in \llbracket 1, m \rrbracket, p_j = L_j(u)$ .

2.5. Démontrer enfin que les  $\lambda_j$  sont les valeurs propres de l'endomorphisme  $u$ .