

CONCOURS CENTRALE-SUPÉLEC

# Mathématiques 1

4 heures

Calculatrice autorisée

PC

2021

Ce sujet est divisé en trois parties.

- Dans la première partie, on étudie une marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$  qui modélise la trajectoire d'une particule. On s'intéresse en particulier au temps nécessaire pour que la particule revienne pour la première fois à son point de départ, si cela arrive. Pour cela, on introduit une suite de nombres appelés nombres de Catalan et on étudie leurs propriétés.
- Dans la deuxième partie, entièrement indépendante de la première, on s'intéresse au calcul d'un déterminant à l'aide d'une suite de polynômes orthogonaux.
- Dans la troisième partie enfin, on utilise les résultats des deux premières parties pour calculer deux déterminants associés aux nombres de Catalan.

## I Étude d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires définies sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $\{-1, 1\}$ , mutuellement indépendantes, et telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p, \quad \text{où } p \in ]0, 1[.$$

On pose  $S_0 = 0$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ .

La suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  modélise la trajectoire aléatoire dans  $\mathbb{Z}$  d'une particule située en  $S_0 = 0$  à l'instant initial  $n = 0$ , et faisant à chaque instant  $n \in \mathbb{N}$  un saut de  $+1$  avec une probabilité  $p$  et de  $-1$  avec une probabilité  $1 - p$ , les sauts étant indépendants et  $p$  appartenant à  $]0, 1[$ .

Pour  $\omega \in \Omega$ , on représente la trajectoire de la particule par la ligne brisée joignant les points de coordonnées  $(n, S_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ .

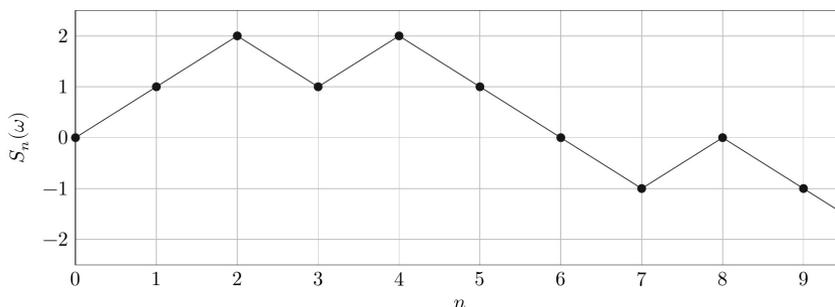


Figure 1 Exemple de trajectoire possible

### I.A – Espérance et variance de $S_n$

Dans cette sous-partie,  $n$  désigne un entier naturel non nul.

Soit  $Y_n$  la variable aléatoire sur  $\Omega$  égale au nombre de valeurs de  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  telles que  $X_k = 1$ .

**Q 1.** Quelle est la loi de  $Y_n$  ? En déduire l'espérance et la variance de  $Y_n$ .

**Q 2.** Quelle relation a-t-on entre  $S_n$  et  $Y_n$  ? En déduire l'espérance et la variance de  $S_n$ . Justifier que  $S_n$  et  $n$  ont même parité.

### I.B – Chemins de Dyck et loi du premier retour à l'origine

Pour  $m \in \mathbb{N}^*$ , on appelle chemin de longueur  $m$  tout  $m$ -uplet  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$  tel que  $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, \gamma_i \in \{-1, 1\}$ .

On pose alors  $s_\gamma(0) = 0$  et, pour tout  $k \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $s_\gamma(k) = \sum_{i=1}^k \gamma_i$ .

On représente le chemin  $\gamma$  par la ligne brisée joignant la suite des points de coordonnées  $(k, s_\gamma(k))$ ,  $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  :

— on appelle chemin de Dyck de longueur  $2n$  tout chemin  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})$  de longueur  $2n$  tel que  $s_\gamma(2n) = 0$  et  $\forall k \in [0, 2n], s_\gamma(k) \geq 0$  ;

— on note  $C_n$  le nombre de chemins de Dyck de longueur  $2n$ .

On convient de plus que  $C_0 = 1$ .

La suite  $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est appelée suite des nombres de Catalan. On constate que  $C_1 = 1$  et  $C_2 = 2$ .

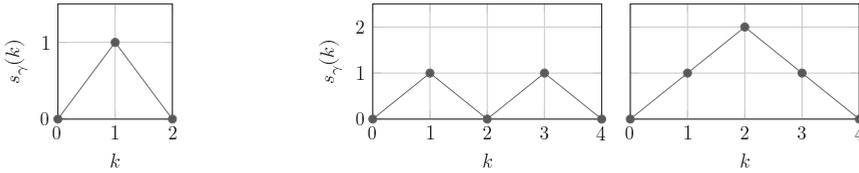


Figure 2 Représentation des chemins de Dyck de longueurs 2 et 4

**Q 3.** Donner sans démonstration la valeur de  $C_3$  et représenter tous les chemins de Dyck de longueur 6. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n+2})$  un chemin de Dyck de longueur  $2n + 2$ . Soit  $r = \max\{i \in [0, n] \mid s_\gamma(2i) = 0\}$ . On suppose  $0 < r < n$  et on considère les chemins  $\alpha = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2r})$  et  $\beta = (\gamma_{2r+2}, \dots, \gamma_{2n+1})$ .

**Q 4.** Justifier à l'aide d'une figure que  $\gamma_{2r+1} = 1$ ,  $\gamma_{2n+2} = -1$  et que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des chemins de Dyck. Soit  $m \in \mathbb{N}^*$  et soit  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$  un chemin de longueur  $m$ .

Pour  $t \in \mathbb{N}$ , on note  $A_{t,\gamma}$  l'événement : « pour tout  $k \in [1, m]$ ,  $X_{t+k} = \gamma_k$  » ; en d'autres termes,

$$A_{t,\gamma} = \bigcap_{k=1}^m (X_{t+k} = \gamma_k).$$

**Q 5.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soit  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{2n})$  un chemin de Dyck de longueur  $2n$ . Pour  $t \in \mathbb{N}$ , exprimer  $\mathbb{P}(A_{t,\gamma})$  en fonction de  $n$  et  $p$ .

Soit  $T$  la variable aléatoire, définie sur  $\Omega$  et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , égale au premier instant où la particule revient à l'origine, si cet instant existe, et égale à 0 si la particule ne revient jamais à l'origine :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad T(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } \forall k \in \mathbb{N}^*, S_k(\omega) \neq 0 \\ \min\{k \in \mathbb{N}^* \mid S_k(\omega) = 0\} & \text{sinon} \end{cases}$$

**Q 6.** Montrer que  $T$  prend des valeurs paires et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(T = 2n + 2) = 2C_n p^{n+1} (1-p)^{n+1}$ .

**I.B.1) Série génératrice des nombres de Catalan**

**Q 7.** En utilisant la question 4, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_{n+1} = \sum_{r=0}^n C_r C_{n-r}.$$

**Q 8.** À l'aide de la variable aléatoire  $T$ , montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} \frac{C_n}{4^n}$  converge.

**Q 9.** En déduire que la série entière  $\sum_{n \geq 0} C_n t^n$  converge normalement sur l'intervalle  $I = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ .

On pose alors, pour tout  $t \in I$ ,

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n t^n \quad \text{et} \quad g(t) = 2t f(t).$$

On rappelle que la série génératrice de  $T$ , donnée par  $G_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) t^n$ , est définie si  $t \in [-1, 1]$ .

**Q 10.** À l'aide des questions précédentes, exprimer  $G_T$  à l'aide de  $g$  et de  $\mathbb{P}(T = 0)$ .

**Q 11.** En déduire que si  $p \neq \frac{1}{2}$ , alors  $T$  admet une espérance.

**Q 12.** Montrer que  $\forall t \in I$ ,  $g(t)^2 = 2g(t) - 4t$ .

**Q 13.** En déduire qu'il existe une fonction  $\varepsilon : I \rightarrow \{-1, 1\}$  telle que

$$\forall t \in I, \quad g(t) = 1 + \varepsilon(t) \sqrt{1 - 4t}.$$

Q 14. Montrer que  $\varepsilon$  est continue sur  $I \setminus \{\frac{1}{4}\}$ . En déduire

$$\forall t \in I, \quad g(t) = 1 - \sqrt{1 - 4t}.$$

Q 15. En déduire que  $\mathbb{P}(T \neq 0) = 1 - \sqrt{1 - 4p(1-p)}$ . Interpréter ce résultat lorsque  $p = \frac{1}{2}$ .

Q 16. Montrer que si  $p = \frac{1}{2}$ , alors  $T$  n'admet pas d'espérance.

**I.C – Expression des nombres de Catalan et équivalent**

Q 17. Justifier l'existence d'une suite de réels  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad \sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1},$$

et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , exprimer  $a_n$  à l'aide d'un coefficient binomial.

Q 18. En déduire  $\forall n \in \mathbb{N}, C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .

Q 19. Rappeler l'équivalent de Stirling. En déduire un équivalent de  $C_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Q 20. À partir de la question précédente, retrouver le résultat des questions 11 et 16.

## II Calcul d'un déterminant à l'aide d'un système orthogonal

Dans cette partie, on suppose que l'espace vectoriel  $\mathbb{R}[X]$  est muni d'un produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$  et on note  $\|\cdot\|$  la norme associée.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $G_n$  la matrice carrée de taille  $n+1$  suivante :

$$G_n = \left( (X^{i-1} | X^{j-1}) \right)_{1 \leq i, j \leq n+1} = \begin{pmatrix} (1|1) & (1|X) & \cdots & (1|X^n) \\ (X|1) & (X|X) & \cdots & (X|X^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (X^n|1) & (X^n|X) & \cdots & (X^n|X^n) \end{pmatrix}$$

On cherche à obtenir une expression du déterminant de  $G_n$  à l'aide d'une suite de polynômes orthogonaux.

### II.A – Définition et propriétés d'un système orthogonal

Dans  $\mathbb{R}[X]$  muni du produit scalaire  $(\cdot | \cdot)$ , on appelle système orthogonal toute suite de polynômes  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vérifiant les propriétés suivantes :

—  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille orthogonale, c'est-à-dire :  $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, i \neq j \Rightarrow (P_i | P_j) = 0$  ;

— pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $P_n$  est unitaire et de degré  $n$ .

Dans toute la partie II, on considère un système orthogonal  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Q 21. Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la famille  $(V_0, V_1, \dots, V_n)$  est une base orthogonale de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}_n[X]$  des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Q 22. Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $P \in \mathbb{R}[X]$  tels que  $\deg P < n$ . Montrer que  $(V_n | P) = 0$ .

Q 23. Soit  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un autre système orthogonal. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = V_n$ .

### II.B – Expression de $\det G_n$ à l'aide de la suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et soit  $G'_n$  la matrice carrée de taille  $n+1$  suivante :

$$G'_n = \left( (V_{i-1} | V_{j-1}) \right)_{1 \leq i, j \leq n+1} = \begin{pmatrix} (V_0 | V_0) & (V_0 | V_1) & \cdots & (V_0 | V_n) \\ (V_1 | V_0) & (V_1 | V_1) & \cdots & (V_1 | V_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (V_n | V_0) & (V_n | V_1) & \cdots & (V_n | V_n) \end{pmatrix}$$

On note  $Q_n = (q_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n+1}$  la matrice de la famille  $(V_0, V_1, \dots, V_n)$  dans la base  $(1, X, \dots, X^n)$  de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Q 24. Montrer que  $Q_n$  est triangulaire supérieure et que  $\det Q_n = 1$ .

Q 25. Montrer que  $Q_n^T G_n Q_n = G'_n$ , où  $Q_n^T$  est la transposée de la matrice  $Q_n$ .

Q 26. En déduire que  $\det G_n = \prod_{i=0}^n \|V_i\|^2$ .

### III Déterminant de Hankel des nombres de Catalan

Dans cette partie, on introduit un produit scalaire particulier sur  $\mathbb{R}[X]$  et une suite de polynômes. On vérifie qu'il s'agit d'un système orthogonal pour ce produit scalaire, ce qui permettra d'appliquer les résultats de la partie précédente.

#### III.A – Produit scalaire

**Q 27.** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  et  $Q \in \mathbb{R}[X]$ . Montrer que la fonction  $x \mapsto P(4x)Q(4x)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$  est intégrable sur  $]0, 1]$ .

Dans toute la partie III, on pose

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X], \quad (P|Q) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 P(4x)Q(4x)\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

**Q 28.** Montrer que  $(\cdot | \cdot)$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}[X]$ .

#### III.B – Système orthogonal

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de polynômes définie par  $U_0 = 1$ ,  $U_1 = X - 1$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $U_{n+2} = (X - 2)U_{n+1} - U_n$ .

**Q 29.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , montrer que  $U_n$  est unitaire de degré  $n$ , et déterminer la valeur de  $U_n(0)$ .

**Q 30.** Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $U_n(4 \cos^2 \theta) \sin \theta = \sin((2n + 1)\theta)$ .

**Q 31.** Soit  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ . Calculer  $\int_0^{\pi/2} \sin((2m + 1)\theta) \sin((2n + 1)\theta) d\theta$ .

**Q 32.** En déduire que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un système orthogonal et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\|U_n\| = 1$ .

Pour calculer la valeur de  $(U_m | U_n)$ , on pourra effectuer le changement de variable  $x = \cos^2 \theta$ .

#### III.C – Application

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\mu_n = (X^n | 1)$ .

**Q 33.** À l'aide d'une intégration par parties, montrer

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 4\mu_{n-1} - \mu_n = \frac{2 \times 4^n}{\pi} \int_0^1 x^{n-3/2}(1-x)^{3/2} dx = \frac{3}{2n-1} \mu_n.$$

**Q 34.** En déduire  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\mu_n = C_n$ .

**Q 35.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Déduire des parties précédentes la valeur du déterminant

$$H_n = \det(C_{i+j-2})_{1 \leq i, j \leq n+1} = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_1 & \ddots & & \ddots & \ddots & C_{n+1} \\ C_2 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & C_{2n-2} \\ C_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & C_{2n-1} \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} & C_{2n-1} & C_{2n} \end{vmatrix}$$

#### III.D – Un autre déterminant de Hankel

Dans cette sous-partie, on pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$D_n(X) = \begin{vmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_1 & \ddots & & \ddots & \ddots & C_{n+1} \\ C_2 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & C_{2n-2} \\ C_{n-1} & C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-2} & C_{2n-1} \\ 1 & X & \cdots & X^{n-2} & X^{n-1} & X^n \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad H'_n = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_{n-1} & C_n \\ C_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & C_{n+1} \\ C_3 & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & C_{2n-3} \\ C_{n-1} & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & C_{2n-2} \\ C_n & C_{n+1} & \cdots & C_{2n-3} & C_{2n-2} & C_{2n-1} \end{vmatrix}$$

**Q 36.** Soit  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$  tel que  $k < n$ . Montrer  $(D_n | X^k) = 0$ .

**Q 37.** En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $D_n = U_n$ , puis déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la valeur du déterminant  $H'_n$ .

• • • FIN • • •