SESSION 2021 **MP8M**

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, I est le segment $[0,1]$ et f la fonction définie sur I par : $x \longmapsto \begin{cases} x^{-x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur I par :

- $\forall\, x \in I,\ f_0(x) = 1$
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in I,\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{(-1)^n}{n\,!}\,(x\,\ln(x))^n & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f et toutes les fonctions f_n sont continues sur I.

2. On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$.

Démontrer que cette série de fonctions converge simplement sur I vers une fonction que l'on déterminera.

3. Étudier les variations de la fonction φ continue sur I, définie pour tout $t \in]0,1]$ par $\varphi(t) = t\,\ln(t)$.

4. Représenter graphiquement la fonction φ sur I en précisant les tangentes aux bornes.

5. Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur I.

6. On pose pour tout réel x et lorsque cela est possible $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

6.1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction Γ.

6.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\Gamma(n+1)$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer l'intégrale $J_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

On pourra effectuer le changement de variable $u = -\ln(t)$.

8. On pose $J = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que l'on a : $J = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}$.

9. Trouver un rang n_0 pour lequel la somme partielle d'ordre n_0 sera une valeur approchée de J à 10^{-6} près.

Exercice 2

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et E un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $(\,|\,)$ et la norme $\|\,\|$.

On note id_E l'endomorphisme identité de E et θ l'endomorphisme nul de E.

1. Soit f un endomorphisme symétrique de E que l'on suppose non inversible et non nul.

1.1. Citer le **théorème spectral**.

1.2. Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au moins une valeur propre non nulle.

1.3. Montrer que les sous-espaces $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont orthogonaux.
Sont-ils supplémentaires ? On justifiera la réponse.

On suppose désormais et jusqu'à la fin de l'exercice que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $(\lambda_j)_{j\in[\![0,k]\!]}$ avec :

$$k \geqslant 1,\ \lambda_0 = 0 \ \text{ et } \ 0 < |\lambda_1| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_k|.$$

Pour tout $j \in [\![0,k]\!]$, on note E_j le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_j et p_j le projecteur orthogonal sur E_j.

1.4. Montrer que $\mathrm{id}_E = \sum_{j=0}^{k} p_j$.

1.5. Prouver que l'on a pour tout couple (i, j) de $[\![0, k]\!]^2$ tels que $i \neq j$, $p_i \circ p_j = \theta$.

1.6. Démontrer que : $f = \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \, p_j$.

1.7. Soit p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Im}(f)$. Montrer que l'on a : $p = \sum_{j=1}^{k} p_j$.

On note alors f^I l'endomorphisme de E défini par : $f^I = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j} p_j$, appelé **inverse généralisé** de f.

2. Quelques propriétés de l'inverse généralisé

2.1. Montrer que l'on a : $f \circ f^I = p$.
En déduire que : $\forall\, (x, y) \in E^2, \Big(f(x) = p(y) \iff x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)\Big)$.

2.2. Soit y un vecteur de E.
Montrer que l'on a : $\forall\, x \in E, \ \Big(\|f(x) - y\| = \operatorname*{Inf}_{z \in E} \|f(z) - y\| \iff x - f^I(y) \in \mathrm{Ker}(f)\Big)$.

3. Application à un exemple

On prend E un espace euclidien de dimension 4 et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base orthonormale de E.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est : $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3.1. Justifier que f est un endomorphisme symétrique, non nul et non inversible.

3.2. Montrer que 2 est valeur propre double de la matrice A.

3.3. En déduire que f admet exactement 3 valeurs propres : $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$.
On note pour tout $j \in [\![0, 2]\!]$, M_j la matrice de p_j dans la base $\mathscr{B}$.

3.4. Justifier que l'on peut écrire A sous la forme : $A = 2\, M_1 + 4\, M_2$.

3.5. Montrer que E_2 est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 de E_2 tel que $\|v_2\| = 1$.

3.6. Démontrer que : $\forall\, x \in E$, $p_2(x) = (x|v_2)\, v_2$.

3.7. Déterminer la matrice M_2.

4. En déduire la matrice associée à f^I relativement à la base $\mathscr{B}$.

Exercice 3

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Pour $|t| < 1$, on définit les fonctions génératrices de X et de Y respectivement par :

- $G_X(t) = \dfrac{1}{2 - t}$,
- $G_Y(t) = 2 - \sqrt{2 - t}$.

1. Déterminer le développement en série entière de la fonction G_X.
2. Donner le terme d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ du développement en série entière de la fonction $t \mapsto (1+t)^{1/2}$.
3. En déduire le développement en série entière de la fonction G_Y.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(X = n)$ et $\mathbb{P}(Y = n)$.
5. Soient $S = X + Y$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer $\mathbb{P}(S = n)$.
6. **Calculs d'espérances et de variances**

   6.1. Justifier que la variable aléatoire $X + 1$ suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.

   6.2. En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

   6.3. Déterminer à l'aide de la fonction génératrice G_Y l'espérance des variables aléatoires Y et $Y(Y-1)$.

   6.4. En déduire la variance de la variable aléatoire Y.

   6.5. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire S.

Exercice 4

Dans tout l'exercice, n est un entier naturel non nul.

Soit φ l'application qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\varphi(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Démontrer que $\mathcal{B} = \big(1, X-1, X(X-1), ..., X^{n-1}(X-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. **Généralités sur φ**

   2.1. Démontrer que φ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

   2.2. Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$ et la dimension du noyau de φ.
3. On considère alors l'application ψ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme Q tel que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad Q(x) = \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t.$$

   3.1. Justifier que l'application ψ est linéaire.

   3.2. Démontrer que $\mathrm{Im}(\psi) = \mathrm{Vect}(X, X^2, ..., X^{n+1})$.

   3.3. Démontrer que : $P \in \mathrm{Ker}(\varphi) \iff \psi(P) \in \mathrm{Vect}(X(X-1), ..., X^n(X-1))$.

   3.4. Donner alors une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
4. On note $\mathcal{H} = \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

   4.1. Donner la dimension de $\mathcal{H}$.

   4.2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, soit ψ_k la forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ associe $\dfrac{P^{(k)}(0)}{k\,!}$.

   Démontrer que la famille $(\psi_0, ..., \psi_n)$ est une base de $\mathcal{H}$.

   4.3. Déterminer les composantes de φ dans cette base.

FIN