SESSION 2020 **PC1M**

CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC

MATHÉMATIQUES

Lundi 4 mai : 8 h - 12 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont autorisées

Le sujet est composé de trois exercices indépendants.

EXERCICE 1
Calcul de l'intégrale de Dirichlet

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \mathrm{d}t$$

et de calculer sa valeur. On considère la fonction $f : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x, t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}.$$

On définit également la fonction $u : [0, +\infty[\times]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, t) \in [0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad u(x, t) = -\frac{x \sin(t) + \cos(t)}{1 + x^2} e^{-xt}.$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leqslant |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaires

Q1. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Q2. En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} \mathrm{d}t$$

est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.

Q3. Soit $x \geqslant 0$. Montrer que $t \mapsto u(x, t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) \mathrm{d}t.$$

Partie II - Calcul de F sur $]0, +\infty[$

Q4. Montrer que $|F(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.

Q5. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} \mathrm{d}t.$$

Q6. En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Conclure que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctan}(x).$$

Partie III - Conclusion

On considère les fonctions $F_1 : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $F_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in [0,1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x,t)\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x,t)\mathrm{d}t.$$

Q7. Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0,1]$.

Q8. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{u(x,t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ et que :

$$F_2(x) = \frac{x\sin(1) + \cos(1)}{1+x^2}e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x,t)}{t^2}\mathrm{d}t.$$

Q9. Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0,1]$.

Q10. En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I.

EXERCICE 2

Extremums d'une forme quadratique sur la boule unité fermée

On se donne un entier $n \geqslant 2$. On rappelle que la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

On note $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.

On fixe des réels $a_{i,j}$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ et on considère l'application $f : B_n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} x_i x_j \right) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier les extremums de la fonction f sur la partie B_n. On définit la matrice $M_f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme la matrice **symétrique** dont les coefficients $(m_{i,j})$ vérifient :

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad m_{i,j} = \begin{cases} a_{i,i} & \text{si} \quad i = j \\ \dfrac{a_{i,j}}{2} & \text{si} \quad i < j. \end{cases}$$

Si M est une matrice à coefficients réels, on note M^{T} sa matrice transposée.

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette **partie**, on suppose que $n = 2$ et que l'application $f : B_2 \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in B_2, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2.$$

Q11. Justifier que l'application f admet un maximum et un minimum sur B_2.

Q12. En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$, déterminer les extremums de l'application f sur la frontière $S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ de B_2.

Q13. Justifier que f est de classe C^1 et déterminer les points critiques de l'application f dans la boule unité ouverte $B_2' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Q14. En déduire que le maximum de f sur B_2 est 3 et que le minimum de f sur B_2 est -1.

Q15. Vérifier que la plus grande valeur propre de M_f est égale au maximum de f sur B_2 et que la plus petite valeur propre de M_f est égale au minimum de f sur B_2.

Partie II - Le cas général

On ne suppose plus dans cette **partie** que $n = 2$.
On considère un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_n$ et on note $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q16. Montrer que $f(x) = X^{\mathrm{T}} M_f X$.

Q17. Justifier que la matrice M_f est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de M_f comptées avec leur multiplicité et on suppose que $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.
On fixe une matrice **orthogonale** $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M_f = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On note $Y = P^{-1}X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q18. Montrer les égalités $Y^{\mathrm{T}} Y = X^{\mathrm{T}} X = \|x\|^2$.

Q19. On suppose que $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$. Montrer que $\lambda_1 \leqslant Y^{\mathrm{T}} D Y \leqslant \lambda_n$ et en déduire que $\lambda_1 \leqslant f(x) \leqslant \lambda_n$.

Q20. En déduire que si $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$, alors $\max\limits_{B_n}(f) = \lambda_n$ et $\min\limits_{B_n}(f) = \lambda_1$.

Q21. Dans le cas où $\lambda_1 \geqslant 0$, déterminer le maximum et le minimum de f sur B_n.

Partie III - Application des résultats

Dans cette **partie**, on suppose que $n \geqslant 3$ et que l'application $f : B_n \to \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in B_n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2 x_i x_j.$$

Q22. Déterminer le maximum et le minimum de l'application f sur B_n (on pourra commencer par déterminer le rang de la matrice $M_f - 2I_n$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

EXERCICE 3

Retour à l'origine d'une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Dans cet exercice, nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant dans l'ensemble des entiers relatifs. À l'étape $n = 0$, on suppose que le pion se trouve en 0. Ensuite, si le pion se trouve à l'étape n sur l'entier $x \in \mathbb{Z}$, alors à l'étape $n + 1$, le pion a une chance sur deux de se trouver en $x + 1$ et une chance sur deux de se trouver en $x - 1$, ceci indépendamment des mouvements précédents.

Pour modéliser cette situation, on se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et on considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}.$$

On considère également la suite de variables aléatoires réelles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_0 = 0$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer la loi de la variable aléatoire T définie de la façon suivante :

1. si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n \neq 0$, on pose $T = +\infty$;
2. sinon, on pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$.

L'évènement $(T = +\infty)$ se réalise donc si et seulement si l'ensemble $\{n \in \mathbb{N}^* \mid S_n = 0\}$ est vide. Finalement, on définit les suites $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(S_n = 0) \quad \text{et} \quad q_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0, \\ P(T = n) & \text{si} \quad n > 0. \end{cases}$$

Partie I - Calcul de p_n

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.

Q23. Que représente la variable aléatoire S_n ?

Q24. Calculer p_0, p_1 et p_2.

Q25. Justifier que si n est impair, alors on a $p_n = 0$.

On considère pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire Y_k définie par $Y_k = \dfrac{X_k + 1}{2}$. On admet que $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes.

Q26. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que Y_k suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

Q27. Pour $n > 0$, donner la loi de $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$ et exprimer S_n en fonction de Z_n.

Q28. On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}$. Déduire de la question précédente que :

$$p_{2m} = \binom{2m}{m} \frac{1}{4^m}.$$

Partie II - Fonction génératrice de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On note R_p le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} p_n x^n$ et f la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence.

Q29. Montrer que $R_p \geqslant 1$.

Q30. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$p_{2m} = \frac{(-1)^m}{m!}\prod_{k=1}^{m}\left(-\frac{1}{2} - k + 1\right).$$

Q31. Déterminer un nombre $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \left(1 - x^2\right)^\alpha$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

Partie III - Loi de la variable aléatoire T

On note R_q le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} q_n x^n$ et g la somme de cette série entière sur son intervalle de convergence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère également la fonction $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g_n(x) = q_n x^n$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q32. Calculer q_1 et q_2.

Q33. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n$ converge normalement sur $[-1, 1]$. En déduire que $R_q \geqslant 1$.

Dans la suite, on **admet** la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_n = \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}.$$

Q34. En utilisant un produit de Cauchy et la relation admise ci-dessus, montrer que :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x)g(x) = f(x) - 1.$$

Q35. En déduire que $g(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$, puis calculer le développement en série entière de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}$ en précisant son rayon de convergence.

Q36. En déduire une expression de q_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Q37. En utilisant **Q33** et **Q35**, déterminer la valeur de $P(T = +\infty)$. Interpréter le résultat.

Q38. La variable aléatoire T admet-elle une espérance ?

FIN