ECOLE POLYTECHNIQUE
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2020

LUNDI 20 AVRIL 2020 - 8h00 – 12h00

FILIERE MP - Epreuve n° 1

MATHEMATIQUES A
(XLCR)

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

Le but de ce problème est d'étudier certains aspects de la diagonalisabilité des matrices symétriques à coefficients rationnels. Ces matrices sont diagonalisables dans $\mathbb{R}$, mais il se trouve que leurs valeurs propres ne peuvent pas prendre n'importe quelle valeur réelle. Le principal objectif de ce problème est de caractériser les nombres réels qui apparaissent comme valeurs propres de matrices symétriques à coefficients rationnels.

Notations

Dans tout le problème, si n et m sont des entiers naturels non nuls et K est un corps,

— on note $M_{m,n}(K)$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans K ainsi que $M_n(K) = M_{n,n}(K)$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients dans K ;

— on identifie l'espace vectoriel K^n à l'espace vectoriel des vecteurs colonnes $M_{n,1}(K)$;

— on note $S_n(K)$ l'ensemble des matrices symétriques carrées de taille n à coefficients dans K ;

— si $A \in M_{m,n}(K)$, on note A^T la matrice transposée de A et, si $m = n$,

$$\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$$

son polynôme caractéristique, qui est donc un polynôme unitaire ;

— si $q_1, \ldots, q_n$ sont des éléments de K, on note $\mathrm{Diag}(q_1, \ldots, q_n)$ la matrice diagonale de taille n de coefficients diagonaux $q_1, \ldots, q_n$.

Première partie

1. Exhiber une matrice $M \in S_2(\mathbb{Q})$ dont $\sqrt{2}$ est valeur propre.

2. Le but de cette question est de montrer que $\sqrt{3}$ n'est pas valeur propre d'une matrice de $S_2(\mathbb{Q})$. On suppose qu'il existe $M \in S_2(\mathbb{Q})$ telle que $\sqrt{3}$ est valeur propre de M.

2a. En utilisant l'irrationnalité de $\sqrt{3}$, montrer que le polynôme caractéristique de M est $X^2 - 3$.

2b. Montrer que si $n \in \mathbb{Z}$, alors n^2 est congru à 0 ou 1 modulo 3.

2c. Montrer qu'il n'existe pas de triplet d'entiers (x, y, z) premiers entre eux dans leur ensemble tel que $x^2 + y^2 = 3z^2$.

2d. Conclure.

3a. On se donne $q \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}^\star$ et une matrice $A \in S_n(\mathbb{Q})$ telle que $A^2 = qI_n$. Construire une matrice $B \in S_{2n}(\mathbb{Q})$ commutant à la matrice $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{smallmatrix}\right)$ et telle que $B^2 = (q+1)I_{2n}$.

3b. Montrer que pour tout $d \geqslant 1$, il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ et des matrices $M_1, \ldots, M_d \in S_n(\mathbb{Q})$ qui commutent deux à deux et telles que $M_k^2 = kI_n$ pour tout entier $1 \leqslant k \leqslant d$.

3c. Soit $d \geqslant 1$ un entier. En déduire que si $q_1, \ldots, q_d \in \mathbb{Q}$, $q_i > 0$, alors il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ et des matrices $M_1, \ldots, M_d \in S_n(\mathbb{Q})$ qui commutent deux à deux et telles que $M_i^2 = q_i I_n$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$.

4. Le but de cette question est de montrer que $\sqrt[3]{2}$ n'est pas valeur propre d'une matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{Q}$. On raisonne par l'absurde, supposant l'existence d'une matrice $M \in S_n(\mathbb{Q})$ (pour un certain entier n) dont $\sqrt[3]{2}$ est valeur propre.

4a. Montrer que $X^3 - 2$ divise le polynôme caractéristique de M. (On pourra commencer par prouver que $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$.)

4b. Conclure.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, construire une matrice $M \in S_n(\mathbb{Q})$ dont $\cos(\frac{2\pi}{n})$ est valeur propre. (On pourra commencer par construire une matrice orthogonale à coefficients dans $\mathbb{Q}$ qui admet $e^{2i\pi/n}$ pour valeur propre.)

Deuxième partie

Soit $P(X)$ un polynôme unitaire de degré $d \geqslant 1$ à coefficients complexes que l'on écrit sous la forme :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \cdots + a_{d-1} X^{d-1} + X^d.$$

On suppose que $a_0 \neq 0$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in \mathbb{C}$ les racines de $P(X)$ (avec multiplicité). Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit :

$$N_n = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \cdots + \lambda_d^n.$$

6. Soit $Q(X)$ le polynôme réciproque de $P(X)$ défini par $Q(X) = X^d P(\frac{1}{X})$. Montrer que :

$$\begin{aligned} Q(X) &= 1 + a_{d-1} X + \cdots + a_1 X^{d-1} + a_0 X^d \\ &= (1 - \lambda_1 X)(1 - \lambda_2 X) \cdots (1 - \lambda_d X). \end{aligned}$$

7. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \backslash (\mathbb{R} \cap \{\frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_d}\}) \to \mathbb{C}$ par $f(x) = \frac{Q'(x)}{Q(x)}$.
Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que f est développable en série entière sur $]-r, r[$, et que le développement en série entière de f en 0 s'écrit :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} N_{n+1} x^n.$$

8a. Montrer que si $a_0, \ldots, a_{d-1}$ sont des éléments de $\mathbb{Q}$, alors $N_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \geqslant 1$.

8b. Réciproquement montrer que si $N_n \in \mathbb{Q}$ pour tout $n \geqslant 1$, alors $a_0, \ldots, a_{d-1}$ sont des éléments de $\mathbb{Q}$.

8c. En déduire que si $\mu_1, \ldots, \mu_d$ sont des nombres complexes et si $P(X) = \prod_{i=1}^d (X - \mu_i)$, alors $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ si et seulement si

$$\forall n \geqslant 1, \quad \sum_{i=1}^{d} \mu_i^n \in \mathbb{Q}.$$

9. Soient $n \geqslant 1$ et $m \geqslant 1$ deux entiers et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m$ des nombres complexes. On définit :

$$A(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n)$$
$$B(X) = (X - \beta_1)(X - \beta_2) \cdots (X - \beta_m).$$

Montrer que si $A(X)$ et $B(X)$ sont à coefficients rationnels, alors les polynômes

$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (X - \alpha_i \beta_j) \quad \text{et} \quad \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (X - \alpha_i - \beta_j)$$

sont aussi à coefficients rationnels.

Troisième partie

On dit qu'un nombre complexe z est *totalement réel* (resp. *totalement positif*) s'il existe un polynôme $P(X)$ non nul à coefficients rationnels tel que :

(i) z est une racine de P, et

(ii) toutes les racines de P sont dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{R}_+$).

10. Soit M une matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Montrer que les valeurs propres de M sont totalement réelles.

11a. Montrer que l'ensemble des nombres totalement réels est un sous-corps de $\mathbb{R}$. (On pourra utiliser le résultat de la question **9**.)

11b. Montrer que l'ensemble des nombres totalement positifs est inclus dans $\mathbb{R}_+$, est stable par addition, multiplication et que l'inverse d'un nombre totalement positif non nul est totalement positif.

12. Soit x un nombre complexe. Montrer que x est totalement réel si et seulement si x^2 est totalement positif.

Quatrième partie

Le but de cette partie est de montrer que, réciproquement, tout nombre totalement réel est valeur propre d'une matrice symétrique à coefficients dans $\mathbb{Q}$.
On note $\mathscr{R}$ l'ensemble des nombres totalement réels et on **admet** qu'il existe une fonction $t : \mathscr{R} \to \mathbb{Q}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

(i) pour $x, y \in \mathscr{R}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$, on a $t(\lambda x + \mu y) = \lambda t(x) + \mu t(y)$

(ii) pour x totalement positif, on a $t(x) \geqslant 0$ et l'égalité est stricte si $x \neq 0$.

On considère un nombre z totalement réel non nul. Par définition, il existe un polynôme unitaire $Z(X) \in \mathbb{Q}[X]$ qui annule z. On écrit $Z(X)$ sous la forme :

$$Z(X) = X^d - \left(a_{d-1} X^{d-1} + \cdots + a_1 X + a_0\right)$$

avec $d \in \mathbb{N}^\star$ et $a_i \in \mathbb{Q}$ pour tout $i \in \{0, \dots, d-1\}$. On suppose en outre que $Z(X)$ est choisi de façon à ce que d soit minimal parmi les degrés des polynômes unitaires $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $P(z) = 0$.

On considère la matrice S de taille $d \times d$ dont le coefficient (i,j), $1 \leqslant i, j \leqslant d$, vaut $t(z^{i+j})$. Pour $X, Y \in \mathbb{R}^d$, on pose $B(X,Y) = X^T S Y$.

13a. Montrer que $B(X,X) > 0$ pour $X \in \mathbb{Q}^d$, $X \neq 0$.

13b. En déduire que la matrice S est inversible.

14. Montrer que B est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^d$.

15a. Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_d)$ de $\mathbb{R}^d$ avec $e_i \in \mathbb{Q}^d$ pour tout i et $B(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$.

15b. En déduire qu'il existe $P \in \mathrm{GL}_d(\mathbb{Q})$ et $q_1, \dots, q_d \in \mathbb{Q}$, $q_i > 0$, tels que :

$$S = P^T \cdot \mathrm{Diag}(q_1, \dots, q_d) \cdot P.$$

On pose :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{d-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_{d-1} \end{pmatrix}.$$

16. Calculer le polynôme caractéristique de M.

17a. Vérifier que la matrice SM est symétrique.

17b. En déduire que la matrice RMR^{-1} est symétrique où $R = \mathrm{Diag}(\sqrt{q_1}, \dots, \sqrt{q_d}) \cdot P$.

18. Construire une matrice symétrique à coefficients rationnels dont z est valeur propre.