ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARIS,
TÉLÉCOM PARIS, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT ATLANTIQUE, ENSAE PARIS, CHIMIE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2020

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES I - MP

L'énoncé de cette épreuve comporte 5 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Espaces vectoriels d'endomorphismes nilpotents

Dans tout le sujet, on considère des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit E un tel espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que $u^p = 0$; le plus petit de ces entiers est alors noté $\nu(u)$ et appelé **nilindice** de u, et l'on remarquera qu'alors $u^k = 0$ pour tout entier $k \geq \nu(u)$. On rappelle que $u^0 = \mathrm{id}_E$. L'ensemble des endomorphismes nilpotents de E est noté $\mathcal{N}(E)$.

Un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dit **nilpotent** lorsque tous ses éléments sont nilpotents, autrement dit lorsque $\mathcal{V} \subset \mathcal{N}(E)$.

Une matrice triangulaire supérieure est dite **stricte** lorsque tous ses coefficients diagonaux sont nuls. On note $\mathrm{T}_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathrm{M}_n(\mathbf{R})$.

L'objectif du problème est d'établir le théorème suivant, démontré par Murray Gerstenhaber en 1958 :

Théorème de Gerstenhaber
Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$. Alors, $\dim \mathcal{V} \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Si en outre $\dim \mathcal{V} = \frac{n(n-1)}{2}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Les trois premières parties du sujet sont largement indépendantes les unes des autres. La partie I est constituée de généralités sur les endomorphismes nilpotents. Dans la partie II, on met en évidence un mode de représentation des endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien. Dans la partie III, on établit deux résultats généraux sur les sous-espaces vectoriels nilpotents : une identité sur les traces (lemme **A**), et une condition suffisante pour que les éléments d'un sous-espace nilpotent non nul possèdent un vecteur propre commun (lemme **B**). Dans l'ultime partie IV, les résultats des parties précédentes sont combinés pour établir le théorème de Gerstenhaber par récurrence sur la dimension de l'espace E.

I Généralités sur les endomorphismes nilpotents

Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel réel E de dimension $n > 0$.

1. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. Montrer que $\operatorname{tr} u^k = 0$ pour tout $k \in \mathbf{N}^*$.

2. On fixe une base $\mathbf{B}$ de E. On note $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice dans $\mathbf{B}$ est triangulaire supérieure stricte. Justifier que $\mathcal{N}_{\mathbf{B}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ et que sa dimension vaut $\frac{n(n-1)}{2}$.

3. Soit $\mathbf{B}$ une base de E. Montrer que
$$\{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}_{\mathbf{B}}\} = \{\nu(u) \mid u \in \mathcal{N}(E)\} = [\![1, n]\!].$$

4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On se donne deux vecteurs x et y de E, ainsi que deux entiers $p \geq q \geq 1$ tels que $u^p(x) = u^q(y) = 0$ et $u^{p-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre, et que si $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre alors $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), y, u(y), \dots, u^{q-1}(y))$ est libre.

5. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$, de nilindice p. Déduire de la question précédente que si $p \geq n-1$ et $p \geq 2$ alors $\operatorname{Im} u^{p-1} = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u^{p-1}$ est de dimension 1.

II Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

On considère ici un espace vectoriel euclidien $\big(E, (- \mid -)\big)$. Étant donné $a \in E$ et $x \in E$, on notera $a \otimes x$ l'application de E dans lui-même définie par :

$$\forall z \in E,\ (a \otimes x)(z) = (a \mid z).x$$

6. On fixe $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que l'application $a \in E \mapsto a \otimes x$ est linéaire et constitue une bijection de E sur $\{u \in \mathcal{L}(E) : \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Vect}(x)\}$.

7. Soit $a \in E$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\operatorname{tr}(a \otimes x) = (a \mid x)$.

III Deux lemmes

On considère ici un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E de dimension $n > 0$. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ contenant un élément non nul. On note

$$p := \max_{u \in \mathcal{V}} \nu(u),$$

appelé **nilindice générique** de $\mathcal{V}$ (cet entier est bien défini grâce à la question 3). On notera que $p \geq 2$.

On introduit le sous-ensemble $\mathcal{V}^\bullet$ de E formé des vecteurs appartenant à au moins un des ensembles $\operatorname{Im} u^{p-1}$ pour u dans $\mathcal{V}$; on introduit de plus le sous-espace vectoriel engendré
$$K(\mathcal{V}) := \operatorname{Vect}(\mathcal{V}^\bullet).$$
Enfin, étant donné $x \in E$, on pose
$$\mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\}.$$
L'objectif de cette partie est d'établir les deux résultats suivants :

Lemme A. Soit u et v dans $\mathcal{V}$. Alors $\operatorname{tr}(u^k v) = 0$ pour tout entier naturel k.

Lemme B. Soit x dans $\mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$. Si $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$, alors $v(x) = 0$ pour tout v dans $\mathcal{V}$.

Dans les questions 8 à 11, on se donne deux éléments arbitraires u et v de $\mathcal{V}$.

8. Soit $k \in \mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique famille $(f_0^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)})$ d'endomorphismes de E telle que
$$\forall t \in \mathbf{R},\ (u + tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t^i f_i^{(k)}.$$
Montrer en particulier que $f_0^{(k)} = u^k$ et $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.

9. Montrer que $\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$.

10. Étant donné $k \in \mathbf{N}$, donner une expression simplifiée de $\operatorname{tr}(f_1^{(k+1)})$, et en déduire la validité du lemme **A**.

11. Soit $y \in E$. Démontrer que $f_1^{(p-1)}(y) \in K(\mathcal{V})$. À l'aide d'une relation entre $u(f_1^{(p-1)}(y))$ et $v(u^{p-1}(y))$, en déduire que $v(x) \in u(K(\mathcal{V}))$ pour tout $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.

12. Soit $x \in \mathcal{V}^\bullet \setminus \{0\}$ tel que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. On choisit $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.
Étant donné $y \in K(\mathcal{V})$, montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$ il existe $y_k \in K(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbf{R}$ tels que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$. En déduire que $K(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x)$ puis que $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

IV Démonstration du théorème de Gerstenhaber

Dans cette ultime partie, nous démontrons le théorème de Gerstenhaber par récurrence sur l'entier n. Le cas $n = 1$ est immédiat et nous le considérerons comme acquis. On se donne donc un entier naturel $n \geq 2$ et on suppose que pour tout espace vectoriel réel E' de dimension $n - 1$ et tout sous-espace vectoriel nilpotent

$\mathcal{V}'$ de $\mathcal{L}(E')$, on a $\dim \mathcal{V}' \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, et si en outre $\dim \mathcal{V}' = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ alors il existe une base de E' dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}'$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

On fixe un espace vectoriel réel E de dimension n, ainsi qu'un sous-espace vectoriel nilpotent $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$. On munit E d'un produit scalaire $(- \mid -)$, ce qui en fait un espace euclidien.

On considère, dans un premier temps, un vecteur arbitraire x de $E \setminus \{0\}$. On pose,

$$H := \mathrm{Vect}(x)^{\perp}, \quad \mathcal{V}x := \{v(x) \mid v \in \mathcal{V}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{W} := \{v \in \mathcal{V} :\ v(x) = 0\}.$$

On note π la projection orthogonale de E sur H. Pour $u \in \mathcal{W}$, on note $\overline{u}$ l'endomorphisme de H défini par

$$\forall z \in H,\ \overline{u}(z) = \pi(u(z)).$$

On considère enfin les ensembles

$$\overline{\mathcal{V}} := \{\overline{u} \mid u \in \mathcal{W}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z} := \{u \in \mathcal{W} :\ \overline{u} = 0\}.$$

13. Montrer que $\mathcal{V}x$, $\mathcal{W}$, $\overline{\mathcal{V}}$ et $\mathcal{Z}$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de E, $\mathcal{V}$, $\mathcal{L}(H)$ et $\mathcal{V}$.

14. Montrer que
$$\dim \mathcal{V} = \dim(\mathcal{V}x) + \dim \mathcal{Z} + \dim \overline{\mathcal{V}}.$$

15. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel L de E tel que
$$\mathcal{Z} = \{a \otimes x \mid a \in L\} \quad \text{et} \quad \dim L = \dim \mathcal{Z},$$
et montrer qu'alors $x \in L^{\perp}$.

16. En considérant u et $a \otimes x$ pour $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$, déduire du lemme **A** que $\mathcal{V}x \subset L^{\perp}$, et que plus généralement $u^k(x) \in L^{\perp}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $u \in \mathcal{V}$.

17. Justifier que $\lambda x \notin \mathcal{V}x$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}^*$, et déduire alors des deux questions précédentes que
$$\dim \mathcal{V}x + \dim L \leq n - 1.$$

18. Soit $u \in \mathcal{W}$. Montrer que $(\overline{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$ pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $z \in H$. En déduire que $\overline{\mathcal{V}}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(H)$.

19. Démontrer que
$$\dim \mathcal{V} \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

Dans toute la suite du problème, on suppose que $\dim \mathcal{V} = \frac{n(n-1)}{2}$.

20. Démontrer que

$$\dim \overline{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad \dim(\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim L = n$$

et

$$L^{\perp} = \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x.$$

En déduire que $\mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$ contient $v^k(x)$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ et tout $k \in \mathbf{N}$.

21. En appliquant l'hypothèse de récurrence, montrer que le nilindice générique de $\mathcal{V}$ est supérieur ou égal à $n-1$, et que si en outre $\mathcal{V}x = \{0\}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Compte tenu du résultat de la question 21, il ne nous reste plus qu'à établir que l'on peut choisir le vecteur x de telle sorte que $\mathcal{V}x = \{0\}$.

On choisit x dans $\mathcal{V}^{\bullet} \setminus \{0\}$ (l'ensemble $\mathcal{V}^{\bullet}$ a été défini dans la partie III). On note p le nilindice générique de $\mathcal{V}$, et l'on fixe $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \mathrm{Im}\, u^{p-1}$. On rappelle que $p \geq n-1$ d'après la question 21.

22. Soit $v \in \mathcal{V}$ tel que $v(x) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$. *On pourra utiliser les résultats des questions 5 et 20.*

23. On suppose qu'il existe v_0 dans $\mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$. Soit $v \in \mathcal{V}$. En considérant $v + tv_0$ pour t réel, montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}(x) \oplus \mathcal{V}x$.

24. Conclure.

Fin du problème