SESSION 2020 **MP8M**

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP

MATHÉMATIQUES

Jeudi 7 mai : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants.

Exercice 1.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et telles que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y = k) = p\, q^k$$

où $p \in]0, 1[$ et $q = 1 - p$.

1. Vérifier que l'on définit ainsi des lois de probabilité.
2. Justifier que la variable aléatoire X possède une espérance et la calculer.
3. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$ et $\mathbb{P}(X < Y)$.
4. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$.

Exercice 2.

Pour tout réel x et tout entier naturel n non nul, on pose : $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \mathrm{ch}\left(\frac{x}{k}\right)$,

où $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2}$.

1. Montrer que pour tout x réel, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
2. Déterminer l'ensemble J des réels x pour lesquels la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.
   On pourra utiliser la suite $(\ln(P_n(x)))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. Soit $x \in J$. On note $\varphi(x)$ la limite de la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$.
   3.1. Étudier la parité et la monotonie de la fonction φ sur J.
   3.2. Démontrer que la fonction φ est continue sur J.
4.
   4.1. Prouver que la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\mathrm{ch}(t)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\mathrm{ch}}$.
   On pourra utiliser un changement de variables.
   4.2. En déduire l'intégrabilité de la fonction $\dfrac{1}{\varphi}$.

Exercice 3.

Questions de cours

1. On considère le trinôme du second degré à coefficients complexes $aX^2 + bX + c$ dont on note s_1 et s_2 les racines.
   Donner sans démonstration les expressions de $\sigma_1 = s_1 + s_2$ et de $\sigma_2 = s_1 s_2$ à l'aide des coefficients a, b et c.
2. Soient a et b deux réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_1 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n$$
   On note r_1 et r_2 les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation caractéristique associée à cette suite.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_n en fonction de r_1, r_2 et n.
   On sera amené à distinguer trois cas et il n'est pas demandé d'exprimer les constantes qui apparaissent en fonction de u_0 et de u_1.

* * * * * *

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des suites réelles $x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ indexées par $\mathbb{Z}$ telles que les sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
On admettra que l'ensemble E des suites réelles indexées par $\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
L'endomorphisme identité de l'espace E sera noté id_E.
On définit les applications S et T de $\mathscr{C}$ dans E par :

$$\forall\, x \in \mathscr{C},\ S(x) = z, \quad \text{avec} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z},\ z_n = x_{-n}$$
$$\text{et}$$
$$\forall\, x \in \mathscr{C},\ T(x) = y, \quad \text{avec} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z},\ y_n = x_{n-1} + x_{n+1}.$$

1. Donner un exemple de suite non constante, élément de $\mathscr{C}$.

2. Montrer que $\mathscr{C}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel E.

3. Prouver que si une suite x est dans $\mathscr{C}$, elle est bornée.

4. Montrer que T est un endomorphisme de $\mathscr{C}$. On admettra qu'il en est de même pour S.

5. Soient $F = \{x \in \mathscr{C},\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ x_n = x_{-n}\}$ et $G = \{x \in \mathscr{C},\ \forall\, n \in \mathbb{Z},\ x_n = -x_{-n}\}$.
Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathscr{C}$.

6. Étude de l'endomorphisme S
Prouver que S est une symétrie de $\mathscr{C}$ dont on précisera les éléments caractéristiques.

7. Étude de l'endomorphisme T
On rappelle qu'une suite x est dans $\mathscr{C}$ lorsque les deux sous-suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

7.1. Soit λ un réel. Montrer que si $\lambda \notin \{-2, 2\}$, $\mathrm{Ker}(T - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathscr{C}}) = \{0_{\mathscr{C}}\}$ où $0_{\mathscr{C}}$ désigne le vecteur nul de $\mathscr{C}$.
On pourra utiliser les questions de cours.

7.2. L'endomorphisme T est-il injectif ?

7.3. Déterminer $\mathrm{Ker}(T - 2\,\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$ et $\mathrm{Ker}(T + 2\,\mathrm{id}_{\mathscr{C}})$.

7.4. Déterminer alors l'ensemble de toutes les valeurs propres de l'endomorphisme T.

8. On munit $\mathscr{C}$ de la norme infinie : si $x \in \mathscr{C}$, $\|x\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$.

Soit N l'application qui à tout élément x de $\mathscr{C}$, associe $N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|x_n| + |x_{-n}|}{2^n}$.

8.1. Vérifier que pour tout x de $\mathscr{C}$, $N(x)$ existe.

8.2. Démontrer que l'on définit ainsi une norme sur l'espace $\mathscr{C}$.

8.3. Montrer que S est une isométrie de l'espace vectoriel normé $(\mathscr{C}, N)$. Est-elle continue ?

8.4. Prouver que dans cet espace normé, les sous-espaces vectoriels F et G sont des fermés.

8.5. Les deux normes $\|\ \|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 4.

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et on pose, pour tout couple $(P, Q) \in E^2$,

$$< P, Q > = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Démontrer que l'on définit ainsi sur E un produit scalaire.
Dans la suite de cet exercice, E est l'espace euclidien $\mathbb{R}_n[X]$ muni de ce produit scalaire.

2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p. Donner sans démonstration la dimension de $F^\perp$.

3. On prend dans cette question $n = 2$.
Déterminer une base du sous-espace $(\mathbb{R}_1[X])^\perp$.

4. On revient au cas général : $n \geqslant 2$ et soit $L \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$ non nul.

4.1. Déterminer le degré de L.

4.2. On pose, lorsque cela est possible, pour x réel : $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 L(t)\,t^x\,\mathrm{d}t$.

4.2.1. Montrer que φ est une fonction rationnelle.

4.2.2. Déterminer les zéros et les pôles de φ. Donner pour chacun son ordre de multiplicité.
On pourra examiner les degrés du dénominateur et du numérateur de la fonction rationnelle φ.

4.2.3. En déduire une expression de φ, à une constante multiplicative près, faisant apparaître le numérateur et le dénominateur sous forme factorisée.

4.3. En utilisant une décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle φ, donner une base de $(\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$.

Exercice 5.

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle convergente de limite ℓ.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $[\,0, 1]$ la fonction en escalier f_n par :

$$\forall\, k \in [\![1, n]\!],\ \forall\, t \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right[,\ f_n(t) = w_k \ \text{ et } \ f_n(1) = w_n.$$

1. Déterminer $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

2. Prouver que l'on a pour tout $t \in [\,0, 1[$, $f_n(t) = w_{\lfloor nt\rfloor+1}$ où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

3. En déduire pour tout $t \in [\,0, 1]$, la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$.

4. Prouver alors que l'on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} w_k = \ell$.

* * * * * *

FIN