

SESSION 2019

PCMA002



---

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PC**

---

**MATHÉMATIQUES**

---

**Lundi 29 avril : 14 h - 18 h**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

---

**Les calculatrices sont autorisées**

**Le sujet est composé de trois exercices indépendants.**

**EXERCICE 1****Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss**

Dans tout l'exercice, on considère un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Partie I - Produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$** **I.1 - Généralités**

Pour tout couple  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ , on note :

$$(P | Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt.$$

- Q1.** Justifier que l'intégrale définissant  $(P | Q)$  est convergente.  
**Q2.** Montrer que l'application  $(\cdot | \cdot) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}$  est un produit scalaire.

**I.2 - Calcul d'un produit scalaire**

- Q3.** Soit  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . À l'aide d'une intégration par parties, établir que :

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt.$$

- Q4.** Conclure que  $(X^k | 1) = k!$  pour tout entier  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

**Partie II - Construction d'une base orthogonale**

On considère l'application  $\alpha$  définie sur  $\mathbb{R}_n[X]$  par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \alpha(P) = XP'' + (1 - X)P'.$$

**II.1 - Propriétés de l'application  $\alpha$** 

- Q5.** Montrer que  $\alpha$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .  
**Q6.** Écrire la matrice de  $\alpha$  dans la base  $(1, X, \dots, X^n)$ .  
**Q7.** En déduire que  $\alpha$  est diagonalisable et que  $\text{Sp}(\alpha) = \{-k \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$ .

## II.2 - Vecteurs propres de l'application $\alpha$

On fixe un entier  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

- Q8.** Quelle est la dimension de  $\ker(\alpha + k\text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$  ?
- Q9.** En déduire qu'il existe un unique polynôme  $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$ , de coefficient dominant égal à 1, vérifiant  $\alpha(P_k) = -kP_k$ .
- Q10.** Justifier que  $P_k$  est de degré  $k$ .
- Q11.** Déterminer  $P_0$  et  $P_1$ . Vérifier que  $P_2 = X^2 - 4X + 2$ .

## II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \dots, P_n)$

On fixe un couple  $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ .

- Q12.** Montrer que  $(\alpha(P) | Q) = - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t} dt$ .
- Q13.** En déduire que  $(\alpha(P) | Q) = (P | \alpha(Q))$ .
- Q14.** Montrer que  $(P_0, \dots, P_n)$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}_n[X]$ . On pourra utiliser **Q9** et **Q13**.

## Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

On admet que le polynôme  $P_n$  admet  $n$  racines réelles **distinctes** que l'on note  $x_1, \dots, x_n$ .

On souhaite montrer qu'il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  tel que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad \int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i). \quad (*)$$

- Q15.** Montrer qu'un  $n$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  vérifie (\*) si et seulement si

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

- Q16.** En déduire qu'il existe un unique  $n$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$  vérifiant (\*).
- Q17.** Déterminer un polynôme  $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$  tel que

$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t} dt \neq \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i).$$

## EXERCICE 2

### Étude d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle suivante :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3. \quad (E)$$

#### Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène associée à (E) :

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0. \quad (H)$$

On fixe une suite de nombres réels  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que la série entière  $\sum a_n x^n$  ait un rayon de convergence  $r > 0$ . On définit la fonction  $f : ]-r, r[ \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$\forall x \in ]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

**Q18.** Justifier que la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et que les fonctions  $f'$  et  $f''$  sont développables en série entière. Exprimer avec la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  les développements en série entière respectifs des fonctions  $f'$  et  $f''$  en précisant leur rayon de convergence.

**Q19.** Montrer qu'il existe une suite  $(b_n)_{n \geq 2}$  de nombres réels non nuls telle que pour tout  $x \in ]-r, r[$ , on a :

$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$

**Q20.** Montrer que  $f$  est solution de (H) sur l'intervalle  $]-r, r[$  si et seulement si  $a_0 = 0$  et  $a_{n+1} = a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Q21.** En déduire que si  $f$  est solution de (H) sur  $]-r, r[$ , alors  $r \geq 1$  et il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in ]-1, 1[, \quad f(x) = \frac{\lambda x}{1-x}.$$

**Q22.** Réciproquement, montrer que si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors la fonction

$$g : ]-1, 1[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{(1-x)}$$

est une solution de (H) sur  $]-1, 1[$  développable en série entière.

**Partie II - Solutions de (E) sur ]0, 1[ ou ]1, +∞[**

On désigne par  $I$  l'un des intervalles  $]0, 1[$  ou  $]1, +\infty[$ . Soit  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . On définit la fonction  $z : I \rightarrow \mathbb{R}$  par la relation :

$$\forall x \in I, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)y(x).$$

- Q23.** Justifier que  $z$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur l'intervalle  $I$ , puis exprimer  $z'$  et  $z''$  avec  $y$ ,  $y'$  et  $y''$ .
- Q24.** Montrer que  $y$  est solution de (E) sur  $I$  si et seulement si  $z$  est solution sur  $I$  de l'équation différentielle :

$$xz'' + z' = 2x. \quad (E_1)$$

- Q25.** Montrer que si  $z$  est solution de (E<sub>1</sub>) sur  $I$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\forall x \in I, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

- Q26.** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur  $I$ .

**Partie III - Solutions de (E) sur ]0, +∞[**

- Q27.** Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur  $]0, +\infty[$ .

### EXERCICE 3

#### Étude d'une marche aléatoire

On considère trois points distincts du plan nommés  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Nous allons étudier le déplacement aléatoire d'un pion se déplaçant sur ces trois points.

À l'étape  $n = 0$ , on suppose que le pion se trouve sur le point  $A$ . Ensuite, le mouvement aléatoire du pion respecte les deux règles suivantes :

1. le mouvement du pion de l'étape  $n$  à l'étape  $n + 1$  ne dépend que de la position du pion à l'étape  $n$ , plus précisément il ne dépend pas des positions occupées aux autres étapes précédentes ;
2. pour passer de l'étape  $n$  à l'étape  $n + 1$ , on suppose que le pion a une chance sur deux de rester sur place, sinon il se déplace de manière équiprobable vers l'un des deux autres points.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $A_n$  l'évènement "le pion se trouve en  $A$  à l'étape  $n$ ",  $B_n$  l'évènement "le pion se trouve en  $B$  à l'étape  $n$ " et  $C_n$  l'évènement "le pion se trouve en  $C$  à l'étape  $n$ ". On note également :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p_n = P(A_n), \quad q_n = P(B_n), \quad r_n = P(C_n) \quad \text{et} \quad V_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix},$$

et on considère la matrice :

$$M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans le démontrer** le résultat suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{1}{3 \cdot 4^n} \begin{pmatrix} 4^n + 2 & 4^n - 1 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n + 2 & 4^n - 1 \\ 4^n - 1 & 4^n - 1 & 4^n + 2 \end{pmatrix}.$$

On rappelle que si  $E$  et  $F$  sont deux évènements avec  $P(F) > 0$ , on définit la probabilité conditionnelle de  $E$  sachant  $F$  (notée  $P(E | F)$  ou  $P_F(E)$ ) par :

$$P(E | F) = P_F(E) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}.$$

#### Partie I - Calcul des probabilités

- Q28.** Calculer les nombres  $p_n, q_n$  et  $r_n$  pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .
- Q29.** Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a la relation  $V_{n+1} = MV_n$ .
- Q30.** En déduire que  $V_n = M^n V_0$ , puis une expression de  $p_n, q_n$  et  $r_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- Q31.** Déterminer les limites respectives des suites  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Interpréter le résultat.

## Partie II - Nombre moyen de passages en A

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on note  $a_n$  le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape  $n$  et on définit la variable aléatoire :

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{si } A_n \text{ est réalisé,} \\ 0 & \text{si } \bar{A}_n \text{ est réalisé.} \end{cases}$$

- Q32.** Interpréter la variable aléatoire  $X_1 + \dots + X_n$  et le nombre  $E(X_1 + \dots + X_n)$ .  
**Q33.** Calculer l'espérance de la variable aléatoire  $X_n$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
**Q34.** En déduire une expression de  $a_n$ .

## Partie III - Temps d'attente avant le premier passage en B

On définit la variable aléatoire  $T_B$  de la façon suivante :

1. si le pion ne passe jamais en B, on pose  $T_B = 0$ ;
2. sinon,  $T_B$  est le numéro de l'étape à laquelle le pion passe pour la première fois en B.

Nous allons déterminer la loi de  $T_B$  et son espérance.

- Q35.** Calculer  $P(T_B = 1)$  et  $P(T_B = 2)$ .  
**Q36.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Exprimer  $\bar{B}_n$  en fonction de  $A_n$  et  $C_n$ .  
**Q37.** Établir que  $P(B_3 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_1) = \frac{1}{4}P(\bar{B}_2 \cap \bar{B}_1)$ , puis en déduire que  $P(B_3 | \bar{B}_2 \cap \bar{B}_1) = \frac{1}{4}$ .

Dans la suite, on admet la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P\left(B_{n+1} \mid \bigcap_{k=1}^n \bar{B}_k\right) = \frac{1}{4}.$$

- Q38.** Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , calculer  $P(T_B = k)$ . Que vaut  $P(T_B = 0)$  ?  
**Q39.** Justifier que la variable aléatoire  $T_B$  admet une espérance. Quelle est l'espérance de  $T_B$  ?

**FIN**