

SESSION 2019

MPMA206



---

**ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MP**

---

**MATHÉMATIQUES 2**

---

**Jeudi 2 mai : 8 h - 12 h**

---

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

---

**Les calculatrices sont interdites**

**Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème, tous indépendants.**

## EXERCICE I

Dans cet exercice "Algorithme de décomposition primaire d'un entier" (*Informatique pour tous*), on se propose d'écrire un algorithme pour décomposer un entier en produit de nombres premiers. Les algorithmes demandés doivent être écrits en langage **Python**. On sera très attentif à la rédaction et notamment à l'indentation du code.

On définit la valuation  $p$ -adique pour  $p$  nombre premier et  $n$  entier naturel non nul.

Si  $p$  divise  $n$ , on note  $v_p(n)$  le plus grand entier  $k$  tel que  $p^k$  divise  $n$ .

Si  $p$  ne divise pas  $n$ , on pose  $v_p(n) = 0$ .

L'entier  $v_p(n)$  s'appelle la valuation  $p$ -adique de  $n$ .

**Q1.** Écrire une fonction booléenne `estPremier(n)` qui prend en argument un entier naturel non nul  $n$  et qui renvoie le booléen `True` si  $n$  est premier et le booléen `False` sinon. On pourra utiliser le critère suivant : un entier  $n \geq 2$  qui n'est divisible par aucun entier  $d \geq 2$  tel que  $d^2 \leq n$ , est premier.

**Q2.** En déduire une fonction `liste_premiers(n)` qui prend en argument un entier naturel non nul  $n$  et renvoie la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux à  $n$ .

**Q3.** Pour calculer la valuation 2-adique de 40, on peut utiliser la méthode suivante :

- 40 est divisible par 2 et le quotient vaut 20
- 20 est divisible par 2 et le quotient vaut 10
- 10 est divisible par 2 et le quotient vaut 5
- 5 n'est pas divisible par 2.

La valuation 2-adique de 40 vaut donc 3.

Écrire une fonction `valuation_p_adique(n, p)` **non récursive** qui implémente cet algorithme. Elle prend en arguments un entier naturel  $n$  non nul et un nombre premier  $p$  et renvoie la valuation  $p$ -adique de  $n$ . Par exemple, puisque  $40 = 2^3 \times 5$ , `valuation_p_adique(40, 2)` renvoie 3, `valuation_p_adique(40, 5)` renvoie 1 et `valuation_p_adique(40, 7)` renvoie 0.

**Q4.** Écrire une deuxième fonction cette fois-ci **récursive**, `val(n, p)` qui renvoie la valuation  $p$ -adique de  $n$ .

**Q5.** En déduire une fonction `decomposition_facteurs_premiers(n)` qui calcule la décomposition en facteurs premiers d'un entier  $n \geq 2$ .

Cette fonction doit renvoyer la liste des couples  $(p, v_p(n))$  pour tous les nombres premiers  $p$  qui divisent  $n$ .

Par exemple, `decomposition_facteurs_premiers(40)` renvoie la liste `[[2, 3], [5, 1]]`.

**EXERCICE II**

Soit  $E$  un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

On note  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle$ .

- Q6.** Un endomorphisme  $u$  de  $E$  vérifiant, pour tout vecteur  $x \in E$ ,  $\langle u(x), x \rangle = 0$ , est-il nécessairement l'endomorphisme nul ?
- Q7.** Étant donné un endomorphisme  $u$  de  $E$ , on admet qu'il existe un unique endomorphisme  $v$  de  $E$  vérifiant :  $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle$ .

Démontrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

- i.  $uov = vou$ .
- ii.  $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle v(x), v(y) \rangle$ .
- iii.  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|v(x)\|$ .

On pourra, par exemple, successivement prouver les implications :

- i  $\Rightarrow$  ii, ii  $\Rightarrow$  iii, iii  $\Rightarrow$  ii et ii  $\Rightarrow$  i.

**PROBLÈME**

On s'intéresse dans ce problème, à travers divers exemples, à quelques méthodes pour prouver que deux matrices sont semblables.

Par la suite,  $n$  désigne un entier naturel,  $n \geq 2$ .

**Partie I – Étude de quelques exemples**

- Q8.** Justifier que deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui sont semblables ont la même trace, le même rang, le même déterminant et le même polynôme caractéristique.

- Q9.** On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vérifier que ces deux matrices ont la même trace, le même déterminant, le même rang et le même polynôme caractéristique.

Ces deux matrices sont-elles semblables ? (on pourra vérifier que l'une de ces matrices est diagonalisable).

Ont-elles le même polynôme minimal ?

- Q10.** On donne deux matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Établir que ces deux matrices sont semblables par les deux méthodes suivantes :

*première méthode* : en utilisant  $u$  l'endomorphisme associé à  $A$  dans une base  $(e_1, e_2, e_3)$  d'un espace vectoriel  $E$  et en cherchant, sans calculs, une nouvelle base de  $E$  ;

*deuxième méthode* : en prouvant que le polynôme  $X^3 - 3X - 1$  admet trois racines réelles distinctes (que l'on ne cherchera pas à déterminer) notées  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$ .

**Q11.** Démontrer que toute matrice  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  de rang 1 est semblable à une matrice :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On pourra utiliser l'endomorphisme  $u$  canoniquement associé à la matrice  $A$ .

**Q12.** *Application* : soit  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n \geq 2$  et  $u$  un endomorphisme de  $E$  de rang 1 vérifiant  $uou \neq 0$ , démontrer que  $u$  est diagonalisable.

On pourra calculer  $U^2$ .

**Q13.** Démontrer qu'une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas nécessairement diagonalisable.

**Q14.** On donne une matrice  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \alpha \end{pmatrix}$  où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres complexes non

nuls, différents et non opposés.

Déterminer le rang de la matrice  $A$  et en déduire que 0 est valeur propre de  $A$ .

Justifier que  $2(\alpha + \beta)$  et  $2(\alpha - \beta)$  sont aussi valeurs propres de  $A$ .

Préciser une base de vecteurs propres de  $A$ .

Dans cette question, il est déconseillé de calculer le polynôme caractéristique de la matrice  $A$ .

**Q15.** Démontrer que quels que soient les réels non nuls  $a, b$  et le réel  $\lambda$ , les matrices  $A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

et  $B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$  sont semblables.

## Partie II – Démonstration d'un résultat

On se propose de démontrer que deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  qui sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , il existe une matrice  $P$  inversible à coefficients complexes telle que  $B = P^{-1}AP$ . Écrivons  $P = R + iS$  où  $R$  et  $S$  sont deux matrices à coefficients réels.

**Q16.** Démontrer que  $RB = AR$  et  $SB = AS$ .

**Q17.** Justifier que la fonction  $x \mapsto \det(R + xS)$  est une fonction polynomiale non identiquement nulle et en déduire qu'il existe un réel  $x$  tel que la matrice  $R + xS$  soit inversible.

**Q18.** Conclure que les matrices  $A$  et  $B$  sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Q19.** *Application* : démontrer que toute matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  de polynôme caractéristique  $X^3 + X$

est semblable à la matrice  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

### Partie III

On s'intéresse dans cette question à la proposition  $P_n$  :

« Deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ayant à la fois le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal sont semblables dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  ».

**Q20.** En étudiant les différentes valeurs possibles pour le polynôme caractéristique et le même polynôme minimal, démontrer que la proposition  $P_n$  est vraie pour  $n = 2$ .

On admet qu'elle l'est également pour  $n = 3$ .

**Q21.** Démontrer que la proposition  $P_n$  est fausse pour  $n = 4$ . On pourra fournir deux matrices composées uniquement de 0 et de 1.

**FIN**