ÉCOLE DES PONTS PARISTECH,
ISAE-SUPAERO, ENSTA PARISTECH,
TELECOM PARISTECH, MINES PARISTECH,
MINES SAINT-ÉTIENNE, MINES NANCY,
IMT Atlantique, ENSAE PARISTECH.

Concours Centrale-Supélec (Cycle International),
Concours Mines-Télécom, Concours Commun TPE/EIVP.

CONCOURS 2018

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 3 heures

L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie :

MATHÉMATIQUES II - PSI

L'énoncé de cette épreuve comporte 6 pages de texte.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Transformation d'Ornstein-Uhlenbeck

Définition 1 (Fonctions dérivables) *Pour tout entier k, on notera $\mathcal{C}_b^k(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions bornées de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbf{R}$ dont toutes les dérivées d'ordre inférieur ou égal à k sont aussi bornées. On note*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)| \text{ et } \|f\|_{k,\infty} = \sup_{j=0,\cdots,k} \|f^{(j)}\|_\infty,$$

où, comme d'habitude, $f^{(0)} = f$.

Définition 2 (Fonctions à croissance lente) *On dira qu'une fonction f est à croissance lente si et seulement si il existe $(A, m) \in \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{N}$ tels que pour tout réel x,*

$$|f(x)| \leq A\left(1 + |x|^m\right).$$

On notera $\mathcal{C}_l(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbf{R}$ qui sont à croissance lente.

On note $\mathcal{C}_l^k(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions à croissance lente, de classe $\mathcal{C}^k$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont à croissance lente.

On rappelle la formule de Taylor avec reste intégral : pour $k \geq 0$, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $[a, b]$,

$$f(b) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j + \frac{1}{k!}\int_a^b (b-t)^k f^{(k+1)}(t)\, dt.$$

I Préliminaires

1. Montrer que pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ sur $[a, b]$,

$$f(b) = \sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j + \frac{(b-a)^{k+1}}{k!}\int_0^1 (1-\theta)^k f^{(k+1)}(a+\theta(b-a))\, d\theta.$$

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $\alpha > 0$, on définit

$$\begin{aligned} g_{n,\alpha} : \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto x^n e^{-\alpha x^2}. \end{aligned}$$

2. Démontrer que pour tout $\alpha > 0$, pour tout $n \geq 0$,

$$\lim_{|x|\to+\infty} x^2 g_{n,\alpha}(x) = 0,$$

et en déduire que $g_{n,\alpha}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

On admettra que

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-y^2/2}\, dy = \sqrt{2\pi}.$$

3. Calculer

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-3t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}\, dt$$

en utilisant le changement de variables $\theta = \arcsin(e^{-t})$.

4. Démontrer que pour tout $(m,n) \in \mathbf{N}^2$, la fonction

$$x \mapsto \frac{(1+|x|^m)(1+|x|^n)}{1+|x|^{n+m}},$$

est bornée sur $\mathbf{R}$. En déduire que $\mathcal{C}_l(\mathbf{R})$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel qui est stable par produit, puis que les fonctions polynomiales appartiennent à $\mathcal{C}_l(\mathbf{R})$.

II Transformation d'Ornstein-Uhlenbeck

Pour simplifier les notations, pour $t \geq 0$, on pose

$$\beta_t = \sqrt{1-e^{-2t}}.$$

5. Démontrer que pour tout $f \in \mathcal{C}_l(\mathbf{R})$, pour tout $x \in \mathbf{R}$ et tout $t \geq 0$ la fonction

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ y &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, f\left(e^{-t}x + \beta_t\, y\right) e^{-\frac{y^2}{2}} \end{aligned}$$

est intégrable sur $\mathbf{R}$.

Pour tout $t \geq 0$, on définit alors la fonction $P_t f$ par $P_0 f = f$ et pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} P_t f \,:\, \mathbf{R} &\longrightarrow \mathbf{R} \\ x &\longmapsto \int_{\mathbf{R}} f\left(e^{-t}x + \beta_t\, y\right) e^{-\frac{y^2}{2}}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}. \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbf{R}$, on note h_x la fonction définie par

$$\begin{aligned} h_x \,:\, \mathbf{R}_+ &\longrightarrow \mathbf{R} \\ t &\longmapsto P_t f(x). \end{aligned}$$

6. Démontrer que, pour tout $f \in \mathcal{C}_l(\mathbf{R})$ et tout $x \in \mathbf{R}$, h_x est une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$ vérifiant

$$\lim_{t\to\infty} P_t f(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y) e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

Indication. On pourra utiliser, après l'avoir prouvée, l'inégalité suivante : pour tout $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ *et tout* $t \geq 0$ *:*

$$\left| e^{-t}x + \beta_t y \right| \leq |x| + |y|.$$

7. A l'aide d'un changement de variables, démontrer que pour tout $f \in \mathcal{C}_l(\mathbf{R})$, tout x, $h \in \mathbf{R}$ et tout $t > 0$:

$$P_t f(x+h) = \int_{\mathbf{R}} f(e^{-t}x + \beta_t\, y) \exp\Big(-\frac{1}{2}(y - \frac{e^{-t}}{\beta_t}\, h)^2\Big) \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

Pour $\alpha > 0$ et $y \in \mathbf{R}$ fixés, soit ψ_y la fonction définie par

$$\begin{aligned} \psi_y \, : \, [-1/\alpha,\, 1/\alpha] &\longrightarrow \mathbf{R} \\ h &\longmapsto \exp(-\frac{1}{2}(y - \alpha h)^2). \end{aligned}$$

8. Montrer que

$$\sup_{h \in [-1/\alpha,\, 1/\alpha]} |\psi_y'(h)| \leq \begin{cases} \alpha(|y|+1) & \text{si } |y| \leq 1, \\ \alpha(|y|+1)\exp(-\frac{1}{2}(|y|-1)^2) & \text{si } |y| > 1. \end{cases}$$

9. Soit $f \in \mathcal{C}_l(\mathbf{R})$ et $t > 0$ fixé. Déterminer

$$\lim_{h\to 0} \frac{P_t f(x+h) - P_t f(x)}{h}.$$

En déduire que $P_t f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et que pour tout $x \in \mathbf{R}$, sa dérivée est donnée par :

$$\left(P_t f\right)'(x) = \frac{e^{-t}}{\beta_t} \int_{\mathbf{R}} f(e^{-t}x + \beta_t\, y)\; y\, e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

10. Démontrer que pour tout $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ et tout $m \geq 0$:

$$|a+b|^m \leq 2^m \left(|a|^m + |b|^m\right).$$

En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}_l(\mathbf{R})$, on a $x \mapsto P_t f(x) \in \mathcal{C}_l(\mathbf{R})$.

On admet dorénavant le lemme suivant.

Lemme 1 *Si f appartient à $\mathcal{C}_l^k$ alors pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto P_t f(x)$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et*

$$(P_t f)^{(k)}(x) = e^{-kt} \int_{\mathbf{R}} f^{(k)}(e^{-t}x + \beta_t\, y)\, e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}. \tag{1}$$

III Générateur infinitésimal

Dans toute cette partie, on suppose que f appartient à $\mathcal{C}_l^2(\mathbf{R})$ et l'on fixe $x \in \mathbf{R}$.

11. Démontrer que h_x est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et que pour tout $t_0 > 0$,

$$h_x'(t_0) = -e^{-t_0}\, x\, (P_{t_0} f')(x) + \frac{e^{-2t_0}}{\beta_{t_0}} \int_{\mathbf{R}} f'(e^{-t_0}\, x + \beta_{t_0}\, y)\, y\, e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

12. Soit $g \in \mathcal{C}_l^1(\mathbf{R})$, montrer que

$$\int_{\mathbf{R}} g(\beta_{t_0}\, y)\, y\, e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} = \beta_{t_0} \int_{\mathbf{R}} g'(\beta_{t_0}\, y)\, e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}}.$$

13. Montrer que h_x est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+$ à l'aide du théorème de prolongement et que

$$h_x'(0) = f''(x) - xf'(x).$$

On notera L l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} L\ :\ \mathcal{C}_l^2 &\longrightarrow \mathcal{C}_l(\mathbf{R}) \\ f &\longmapsto Lf\ :\ \big(x \mapsto f''(x) - xf'(x)\big) \end{aligned}$$

ou de façon plus simple, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$(Lf)(x) = f''(x) - xf'(x).$$

IV Théorème central limite

On admet le théorème de représentation suivant.

Théorème 1 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_l^2(\mathbf{R})$, pour tout $y \in \mathbf{R}$,*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} f(x) e^{-x^2/2} \, dx - f(y) = \int_0^\infty L(P_t f)(y) \, dt.$$

Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires discrètes, mutuellement indépendantes et de même loi, toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On suppose de plus que $|X_1|^3$ a une espérance finie.

14. Montrer que X_1 et X_1^2 ont une espérance finie.

    Indication. On pourra découper l'espace probabilisé Ω selon la position de $|X_1(\omega)|$ par rapport à 1.

On suppose dorénavant que $\mathbf{E}\left[X_1^2\right] = 1$ et $\mathbf{E}\left[X_1\right] = 0$. On fixe $n \geq 1$ et l'on pose

$$S = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \text{ et } S^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n X_i.$$

15. Rappeler la définition de l'indépendance mutuelle des variables $X_1, \cdots, X_n$. En déduire que les variables X_1 et $(X_2, \cdots, X_n)$ sont indépendantes.

16. Pour g fonction bornée, montrer que pour $m \in \{1, 2, 3\}$ et tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\mathbf{E}\left[X_i^m \, g(S^{(i)})\right] = \mathbf{E}\left[X_i^m\right] \mathbf{E}\left[g(S^{(i)})\right]. \tag{2}$$

Dans les questions suivantes, on suppose $g \in \mathcal{C}_b^3$.

17. Déduire de (2) l'identité suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[g''(S) - S\, g'(S)\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left[g''(S) - g''(S^{(i)})\right] \\ - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathbf{E}\left[X_i \left(g'(S) - g'(S^{(i)}) - \frac{X_i}{\sqrt{n}} g''(S^{(i)})\right)\right]. \end{aligned} \tag{3}$$

18. En appliquant deux fois la formule de Taylor établie dans la question 1, établir l'identité suivante :

$$\mathbf{E}\left[Lg(S)\right] = \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[X_i \int_0^1 g^{(3)}(S^{(i)} + \frac{\theta}{\sqrt{n}} X_i)\, d\theta\right] - \frac{1}{n^{3/2}} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}\left[X_i^3 \int_0^1 (1-\theta)\, g^{(3)}(S^{(i)} + \frac{\theta}{\sqrt{n}} X_i)\, d\theta\right].$$

19. Montrer que

$$\left|\mathbf{E}\left[Lg(S)\right]\right| \leq \frac{\|g^{(3)}\|_\infty}{\sqrt{n}}\, \mathbf{E}\left[|X_1| + |X_1|^3\right].$$

20. En utilisant la question 9 et l'équation (1), montrer que pour $f \in \mathcal{C}_b^2$, pour tout $t > 0$, pour tout réel x,

$$(P_t f)^{(3)}(x) = \frac{e^{-3t}}{\beta_t} \int_{\mathbf{R}} f''(e^{-t}x + \beta_t y)\, y e^{-y^2/2}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi}},$$

puis que

$$\|(P_t f)^{(3)}\|_\infty \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \frac{e^{-3t}}{\beta_t}\, \|f\|_{2,\infty}.$$

21. En déduire que

$$\sup_{f \in \mathcal{C}_b^2} \left| \mathbf{E}\left[f(S)\right] - \int_{\mathbf{R}} f(y) e^{-y^2/2}\, \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} \right| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\, \frac{\|f\|_{2,\infty}}{\sqrt{n}}\, \mathbf{E}\left[|X_1| + |X_1|^3\right].$$

On admet que l'expression suivante

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{C}_b^2 \\ \|f\|_{2,\infty} \leq 1}} \left| \mathbf{E}\left[f(X)\right] - \mathbf{E}\left[f(Y)\right] \right|$$

définit une distance entre les lois de X et de Y. On a donc montré que la vitesse de convergence dans le théorème de la limite centrée est de l'ordre de $1/\sqrt{n}$.

Fin du problème