**SESSION 2017** **MPMA206**

CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

**EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP**

# MATHEMATIQUES 2

**Jeudi 4 mai : 8 h - 12 h**

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

$\boxed{\text{Les calculatrices sont autorisées}}$

**Le sujet est composé d'un seul problème.**

**Notations**

- Dans tout le sujet, $\mathbb{K}$ désigne les corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $p$ désigne un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille $p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- On note $I_p$ la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.
- Si $x = (x_1, \ldots, x_p)$ est un vecteur de $\mathbb{K}^p$, on note $\|x\|_\infty$ sa norme «infinie» définie par :
$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \quad | \quad i \in [\![1, p]\!]\}.$$
- On dit que $x$ est un vecteur stochastique si ses coordonnées sont positives ou nulles et leur somme vaut 1 :
$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ x_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{p} x_i = 1.$$
- Une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chacune de ses lignes vaut 1, c'est-à-dire si :
$$\forall (i,j) \in [\![1, p]\!]^2, a_{i,j} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in [\![1, p]\!], \quad \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = 1.$$
- Une matrice $A$ est dite strictement positive si tous ses coefficients sont strictement positifs. On note alors $A > 0$.
- Si $b_1, b_2, \ldots, b_k$ sont des nombres complexes (respectivement des matrices carrées), on note $\mathrm{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ la matrice diagonale (respectivement diagonale par blocs) dont les coefficients diagonaux (respectivement blocs diagonaux) sont $b_1, b_2, \ldots, b_k$.

**Objectifs**

Le sujet est constitué d'un seul problème qui traite de matrices stochastiques dans un contexte probabiliste de chaîne de Markov (partie I). On étudie le spectre d'une matrice stochastique $A$ (partie II) et la suite des itérés de $A$ (partie III). On introduit aussi la notion de probabilité invariante par $A$ (partie IV), suivie de son calcul effectif par ordinateur (partie V).

La partie I est indépendante des autres parties. La partie IV utilise les deux résultats démontrés dans les parties II et III. La partie V est une partie informatique liée à la partie IV, mais qui peut être traitée de manière indépendante.

## Partie I - Un exemple de chaîne de Markov

Une particule possède deux états possibles numérotés 1 et 2 et peut passer de son état à l'état 1 ou 2 de façon aléatoire. On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sur lequel on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire $X_n$ égale à l'état de la particule au temps $n$. L'état de la particule au temps $n+1$ dépend uniquement de son état au temps $n$ selon les règles suivantes :

- si au temps $n$ la particule est dans l'état 1, au temps $n+1$ elle passe à l'état 2 avec une probabilité $\dfrac{1}{2}$.
- si au temps $n$ la particule est dans l'état 2, au temps $n+1$, elle passe à l'état 1 avec une probabilité $\dfrac{1}{4}$.

On suppose que $P(X_0 = 1) = P(X_0 = 2) = \dfrac{1}{2}$.

**Q1.** Déterminer en justifiant la loi de $X_1$.

On pose $\mu_n = (P(X_n = 1), P(X_n = 2))$ le vecteur ligne de $\mathbb{R}^2$ caractérisant la loi de $X_n$.

**Q2.** Justifier la relation matricielle suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mu_{n+1} = \mu_n A \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

**Q3.** En déduire, à l'aide de la calculatrice, la loi de $X_5$ (on demande les résultats arrondis au centième).

**Q4.** Temps de premier accès à l'état 1 : on note $T$ la variable aléatoire égale au plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $X_n = 1$. Déterminer $P(T = 1)$, puis $P(T = k)$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

**Q5.** Justifier que $A$ est diagonalisable, puis donner, sans détailler les calculs, une matrice $Q$ inversible à coefficients entiers telle que

$$A = Q \operatorname{diag}\left(1, \frac{1}{4}\right) Q^{-1}.$$

**Q6.** Justifier que les applications $M \mapsto QMQ^{-1}$ et $M \mapsto \mu_0 M$ définies sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ sont continues.

**Q7.** En déduire la convergence de la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis de la suite de vecteurs lignes $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Préciser les coefficients du vecteur ligne obtenu comme limite.

La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un cas particulier de variables aléatoires dont l'état à l'instant $n+1$ ne dépend que de son état à l'instant $n$ et pas des précédents. On dit alors que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov. Plus généralement si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov prenant ses valeurs dans $[\![1, p]\!]$, la loi des variables $X_n$ est entièrement déterminée par la donnée de la loi de $X_0$ et d'une matrice stochastique $A$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Si on pose maintenant $\mu_n = (P(X_n = 1), P(X_n = 2), \ldots, P(X_n = p))$, l'étude du comportement de la loi de $X_n$ lorsque $n$ est grand, se ramène alors à l'étude de la convergence de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $\mu_{n+1} = \mu_n A$. Cela conduit à l'étude de la suite de matrices $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$. C'est l'objet des parties suivantes.

## Partie II - Spectre d'une matrice stochastique

Soit $A$ une matrice stochastique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

**Q8.** Justifier que 1 est valeur propre de $A$ (on pourra considérer le vecteur colonne de $\mathbb{R}^p$ dont toutes les coordonnées valent 1).

**Q9.** Soit $x$ un vecteur colonne de $\mathbb{C}^p$. Démontrer que $\|Ax\|_\infty \leqslant \|x\|_\infty$.

**Q10.** En déduire que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de $A$, on a $|\lambda| \leqslant 1$.

### Localisation des valeurs propres

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $A$.

**Q11.** Justifier l'existence d'un vecteur colonne $x = (x_1, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{C}^p$ tel que $\|x\|_\infty = 1$ et $Ax = \lambda x$.

**Q12.** Soit $i \in [\![1, p]\!]$ tel que $|x_i| = 1$. Démontrer que :

$$|\lambda - a_{i,i}| \leqslant 1 - a_{i,i}.$$

### Étude d'un exemple

**Q13.** Dans cette question uniquement, on prend :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Déduire de la question précédente que les valeurs propres de $A$ sont contenues dans la réunion de trois disques, que l'on représentera en précisant leurs centres et leurs rayons.

On constate en particulier sur l'exemple que 1 est la seule valeur propre de $A$ de module 1. On admettra, dans la suite du problème, que cette propriété reste vraie pour toute matrice stochastique **strictement positive**.

### Cas des matrices stochastiques strictement positives

**Q14.** On suppose en plus pour cette question et la question suivante que la matrice $A$ est strictement positive. On pose $B = A - I_p$ et on note $B'$ la matrice de $\mathcal{M}_{p-1}(\mathbb{R})$ obtenue en supprimant la dernière colonne et la dernière ligne de $B$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $B'$.

On admet qu'il existe un entier $i \in [\![1, p-1]\!]$ tel que :

$$|\lambda - (a_{i,i} - 1)| \leqslant 1 - a_{i,i} - a_{i,p}.$$

La démonstration (non demandée) de cette inégalité est similiaire à celle de la question **Q12**.

Déduire de cette inégalité que $B'$ est inversible.

**Q15.** En déduire que $\dim \operatorname{Ker}(A - I_p) = 1$.

On admet sans démonstration que 1 est racine simple du polynôme caractéristique de $A$. On dit alors que 1 est une valeur propre simple de $A$. Nous pouvons résumer les résultats de cette partie par la **Proposition 1** ci-dessous.

**Proposition 1.** *Soit $A$ une matrice stochastique de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ strictement positive. Alors 1 est valeur propre simple et les autres valeurs propres ont un module strictement inférieur à 1.*

## Partie III - Itérées d'une matrice stochastique

On démontre dans cette partie la proposition suivante :

**Proposition 2.** *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, stochastique et strictement positive, la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.*

### Un contre-exemple

**Q16.** On considère $s$ la symétrie orthogonale de $\mathbb{R}^2$ par rapport à la droite d'équation $y = x$. Donner, sans justification, la matrice $B$ de $s$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

**Q17.** La **Proposition 2** reste-t-elle vraie si la matrice stochastique n'est pas strictement positive ?

### Résultat préliminaire

Soit $\lambda$ un nombre complexe avec $|\lambda| < 1$ et $N$ une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

**Q18.** Démontrer que $N^p = 0$.

**Q19.** Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier que pour $n$ au voisinage de $+\infty$, $\binom{n}{k}$ est équivalent à $\dfrac{n^k}{k!}$. En déduire la limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$ de $\binom{n}{k}\lambda^{n-k}$.

**Q20.** En déduire que la suite de matrices $((\lambda I_p + N)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

### Convergence d'une suite de matrices

Soit $A$ une matrice stochastique et strictement positive de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On sait, d'après la **Proposition 1**, que 1 est valeur propre simple de $A$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sont les autres valeurs propres complexes de $A$, un théorème du cours montre que $A$ est semblable sur $\mathbb{C}$ à une matrice diagonale par blocs du type

$$\mathrm{diag}(1, \lambda_1 I_{p_1} + N_1, \ldots, \lambda_r I_{p_r} + N_r) \ ,$$

avec $p_1, \ldots, p_r$ des entiers et $N_1, \ldots, N_r$ des matrices nilpotentes à coefficients complexes.

**Q21.** Déduire des questions **Q18** à **Q20** que la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

## Partie IV - Probabilité invariante par une matrice stochastique

**Définition.** *Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique. On dit que $A$ admet une probabilité invariante s'il existe un vecteur ligne stochastique $\mu \in \mathbb{R}^p$ tel que $\mu A = \mu$ (on dit alors que $\mu$ est une probabilité invariante par $A$).*

Le but de cette partie est de démontrer la propriété énoncée dans la **Proposition 3** ci-dessous.

**Proposition 3.** *Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique strictement positive et $\mu_0 \in \mathbb{R}^p$ un vecteur ligne stochastique. On note $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de vecteurs lignes de $\mathbb{R}^p$ définie par la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mu_{n+1} = \mu_n A$. Alors, la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur stochastique $\mu_\infty$ vérifiant $\mu_\infty = \mu_\infty A$. De plus, le vecteur $\mu_\infty$ est l'unique probabilité invariante par $A$ (il ne dépend donc pas du choix de $\mu_0$).*

Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice stochastique strictement positive et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie ci-dessus.

**Q22.** Démontrer que l'ensemble des vecteurs stochastiques de $\mathbb{R}^n$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.

### Convergence de la suite

**Q23.** Démontrer que la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $\mu_\infty$ vérifiant $\mu_\infty = \mu_\infty A$.

**Q24.** Soit $\mu = (m_1, \ldots, m_p)$ un vecteur ligne stochastique. Démontrer que $\mu A$ est encore un vecteur stochastique.

**Q25.** En déduire que $\mu_\infty$ est une probabilité invariante par $A$.

### Unicité de la probabilité invariante

**Q26.** Lien avec le spectre de la transposée de $A$ : soit $\mu \in \mathbb{R}^p$ un vecteur ligne stochastique. Justifier que $\mu$ est une probabilité invariante pour $A$, si et seulement si le vecteur colonne ${}^t\mu$ est un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre 1.

**Q27.** Justifier, en utilisant la **question Q15**, que $\dim \operatorname{Ker}({}^tA - I_p) = 1$.

**Q28.** En déduire que $A$ admet une unique probabilité invariante.

## Partie V - Informatique : calcul effectif de la probabilité invariante d'une matrice stochastique strictement positive

Si $A$ est une matrice stochastique strictement positive, on a établi dans la partie précédente la convergence de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la matrice $A$. Ceci fournit un algorithme de calcul de la probabilité invariante par $A$. On en propose une implémentation en langage Python. On sera très attentif à la rédaction et notamment à l'indentation du code.

Un vecteur $x$ de $\mathbb{R}^p$ sera représenté en Python par une liste de flottants. Par exemple, le vecteur $x = (1, 2, 3)$ de $\mathbb{R}^3$ sera représenté par la liste `[1,2,3]`. De même, une matrice $A$ sera représentée par une liste dont les éléments sont les lignes de la matrice. Par exemple, la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ sera représentée par la liste `[ [1,2,3], [4,5,6] ]`.

**Q29.** On exécute le script suivant `A = [ [1,2,3], [4,5,6], [7,8,9], [10,11,12] ]` qui représente la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$.

Donner les valeurs renvoyées lorsque l'on exécute `len(A)`, `A[1]` et `A[2][1]`.

**Q30.** Écrire une fonction `difference` qui prend en arguments deux vecteurs $x$ et $y$ de même taille et renvoie le vecteur $x - y$. Par exemple si $x = (5, 2)$ et $y = (3, 7)$, `difference(x,y)` renverra `[2,-5]`.

**Q31.** Écrire une fonction `norme` qui prend en arguments un vecteur $x = (x_1, \dots, x_p)$ et renvoie sa norme infinie $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \quad | \quad i \in [\![1, p]\!]\}$ (on pourra utiliser librement la fonction `abs` qui renvoie la valeur absolue d'un nombre, mais on s'interdit l'utilisation de la fonction `max` déjà implémentée dans Python).

**Q32.** Écrire une fonction `itere` qui prend en arguments un vecteur ligne $x$ et une matrice $A$ carrée de même taille que $x$ et qui renvoie le vecteur $xA$. Par exemple si $x = (1, 1)$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, on a $xA = (5, 7)$ et donc `itere(x,A)` renverra `[5,7]`.

**Q33.** On a vu, dans la **Partie IV**, que si $A$ est une matrice strictement positive, la suite de vecteurs lignes de $\mathbb{R}^p$ associée $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation : $\forall n \in \mathbb{N},\ \mu_{n+1} = \mu_n A$ convergeait vers un vecteur $\mu_\infty$ indépendant du choix de $\mu_0$ vecteur stochastique.

Écrire une fonction `probaInvariante` qui prend en arguments une matrice stochastique strictement positive $A$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et un réel $\varepsilon > 0$ et qui renvoie le premier terme $\mu_k$ de la suite $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\mu_0 = \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{p}, \dots, \frac{1}{p}\right)$ tel que $\|\mu_k - \mu_{k-1}\|_\infty \leqslant \varepsilon$. On ne demandera pas à l'algorithme de vérifier que la matrice passée en argument est bien stochastique et strictement positive.

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ et $\varepsilon = 10^{-6}$,

`probaInvariante(A,eps)` renverra `[0.33333396911621094, 0.6666660308837891]`.

**FIN**