CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES

EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI

MATHEMATIQUES

Mardi 3 mai : 14 h - 18 h

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont autorisées

Notations et définitions

- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.
- Si n, m sont deux entiers naturels non nuls, on désigne par $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$] l'espace vectoriel des matrices à n lignes et m colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ [respectivement dans $\mathbb{C}$]. Comme $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ est contenu dans $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$, une matrice à coefficients réels est aussi à coefficients complexes.
- Si $n = m$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$] pour $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$].
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$].
- Si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que cette suite converge vers une matrice $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ si, pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la suite $(M_n(i,j))_{n\in\mathbb{N}}$ des coefficients d'indice (i,j) de M_n converge vers le coefficient, noté $L(i,j)$, d'indice (i,j) de L.
- Un vecteur $(x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ [respectivement de $\mathbb{C}^n$] est identifié à l'élément $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ [respectivement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$].
- Pour tout vecteur $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on note $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| \ ; \ 1 \leq i \leq n\}$.
- Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on désigne par $\mathrm{Sp}(A)$ l'ensemble de toutes les valeurs propres complexes de A et on note :

$$\rho(A) = \max_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)} |\lambda|.$$

  On rappelle que $\rho(A)$ est le rayon spectral de A.
- Si X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telle que $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, on identifie la loi P_X de X au vecteur colonne $\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X = x_1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X = x_n) \end{pmatrix}$.

Objectifs

L'objet de ce problème est d'étudier la suite des puissances d'une matrice stochastique. La première partie est consacrée à cette étude dans le cas où $n = 2$. Dans la seconde partie, on étudie le spectre des matrices stochastiques. Dans la troisième partie, on étudie l'existence d'une probabilité invariante par une matrice stochastique et la dernière partie est consacrée à l'étude des puissances d'une telle matrice.

Partie I

Cas $n = 2$

On suppose dans cette partie que $n = 2$ et, pour $\alpha \in [0,1]$ et $\beta \in [0,1]$ avec $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$, on note :

$$A(\alpha,\beta) = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}.$$

Il pourra être utile de noter $\lambda = 1 - (\alpha + \beta)$.

I.1 Puissances de $A(\alpha,\beta)$

Q1. Montrer que 1 est valeur propre de $A(\alpha,\beta)$ et déterminer le sous-espace propre associé.

Q2. Montrer que $A(\alpha,\beta)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et la diagonaliser.

Q3. Calculer, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, la matrice $A(\alpha,\beta)^p$.

Q4. Montrer que, pour $(\alpha,\beta) \neq (1,1)$, la suite $(A(\alpha,\beta)^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $L(\alpha,\beta)$ que l'on précisera. Que se passe-t-il pour $(\alpha,\beta) = (1,1)$?

I.2 Application

Soient α et β deux réels de $]0,1[$. Un message binaire de longueur ℓ, c'est-à-dire une suite finie $(a_1, a_2, \cdots, a_\ell)$ où pour tout $i \in \{1,\cdots,\ell\}$, $a_i \in \{0,1\}$, est transmis dans un réseau formé de relais. On suppose que, à chaque relais, un élément $x \in \{0,1\}$ est transmis avec une probabilité d'erreur égale à α pour un passage de 0 à 1 et β pour un passage de 1 à 0. On note X_0 la variable aléatoire définissant le message initial de longueur ℓ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, au n-ième relais, le résultat du transfert est noté X_n. On suppose que les relais sont indépendants les uns des autres et que les erreurs sur les bits constituant le message sont indépendantes.

Q5. **Cas $\ell = 1$**

Montrer que pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{pmatrix} P(X_{n+1}=0) \\ P(X_{n+1}=1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(X_n=0) \\ P(X_n=1) \end{pmatrix}.$$

Calculer, pour $n > 0$, $\mathbb{P}(X_n = 0 | X_0 = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = 1 | X_0 = 1)$.

Si $r = \min\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}, \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\right)$, montrer que la probabilité pour que X_n soit conforme à X_0 est supérieure ou égale à :

$$r + (1-r)(1-\alpha-\beta)^n.$$

Q6. Cas $\ell > 1$

On pose $X_n = \left(X_n^1, \cdots, X_n^\ell\right)$ où, pour $k \in \{1, \cdots, \ell\}$, X_n^k est le résultat de la transmission du k-ième bit au n-ième relais. Soit Q_n la probabilité pour que le message X_n soit conforme au message initial. Montrer que Q_n vérifie :

$$Q_n \geq \left(r + (1-r)\,(1-\alpha-\beta)^n\right)^\ell .$$

Q7. On suppose dans cette question que $\alpha = \beta$. Que peut-on dire dans ce cas de l'inégalité précédente ?

Pour tout $\varepsilon \in \left]0,1\right[$, déterminer un entier n_c tel que la probabilité d'obtenir un message erroné au n-ième relais soit supérieure ou égale à ε (on dit que n_c est la *taille critique* du réseau).

Partie II

Spectre des matrices stochastiques

Dans cette partie, les matrices considérées sont carrées et d'ordre $n \geq 2$. On dit qu'une matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stochastique [respectivement strictement stochastique] si et seulement si elle est à coefficients positifs [respectivement strictement positifs] et :

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, \ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

II.1 Coefficients

Q8. Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique [respectivement strictement stochastique]. Montrer que pour tous i, j compris entre 1 et n on a :

$$0 \leq a_{ij} \leq 1 \text{ [respectivement } 0 < a_{ij} < 1\text{]}.$$

Q9. Montrer qu'une matrice A à coefficients réels positifs est stochastique si et seulement si 1 est valeur propre de A et le vecteur e de coordonnées $(1, \cdots, 1)$ est un vecteur propre associé.

Q10. Montrer que le produit de deux matrices stochastiques [respectivement strictement stochastiques] est une matrice stochastique [respectivement strictement stochastique].

II.2 Valeurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice stochastique.

Q11. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, \ \forall p \in \mathbb{N}, \ \|A^p x\|_\infty \leq \|x\|_\infty .$$

Q12. Montrer que $\rho(A) = 1$.

II.3 Diagonale strictement dominante

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dite à diagonale strictement dominante si et seulement si

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\},\ |a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

Q13. Soit A une matrice quelconque dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer qu'il existe un indice $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tel que :

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

Q14. Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ à diagonale strictement dominante est inversible.

II.4 Valeur propre de module maximal

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique.

Q15. On désigne par $A_1 = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n-1} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ la matrice extraite de A en supprimant sa dernière ligne et sa dernière colonne. Montrer que la matrice $A_1 - I_{n-1}$ est à diagonale strictement dominante. Que peut-on en déduire quant au rang de $A - I$?

Q16. Montrer que $\ker(A - I_n)$ est de dimension 1.

Q17. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \setminus \{1\}$. Montrer que $|\lambda| < 1$.

Partie III
Probabilité invariante

On considère quatre points dans le plan numérotés de 1 à 4. Une particule se déplace chaque seconde sur l'ensemble de ces points de la façon suivante : si elle se trouve au point i, elle reste au point i avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{10}$ ou passe en un point $j \neq i$ de façon équiprobable.

III.1 Une suite de variables aléatoires

On note X_0 une variable aléatoire de loi P_0 donnant la position du point en l'instant $n = 0$, X_n la position du point à l'instant n et $P_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = 4) \end{pmatrix}$ la loi de X_n.

Q18. Montrer qu'il existe une matrice Q, que l'on déterminera, telle que :

$$P_1 = QP_0.$$

Calculer P_n en fonction de Q et de P_0.

Q19. Montrer qu'il existe un unique vecteur $\Pi = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix}$, que l'on déterminera, tel que :

$$\forall i \in \{1, \cdots, 4\},\ p_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{4} p_i = 1 \quad \text{et} \quad \Pi = Q\Pi.$$

III.2 Rapidité de convergence

Q20. Montrer sans calcul que Q est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Q21. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de Q.

Q22. En déduire que $(Q^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice R que l'on précisera en fonction de Π et qu'il existe $r \in]0, 1[$ tel que :

$$\|Q^p - R\| = O\left(r^p\right).$$

En déduire que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite indépendante de la loi de X_0 et interpréter le résultat obtenu.

Partie IV

Puissances d'une matrice stochastique

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice strictement stochastique. On note :

$$m = \min_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}.$$

Pour tout entier naturel non nul p, on note $a_{i,j}^{(p)}$ le coefficient d'indice (i, j) de A^p :

$$A^p = \left(a_{i,j}^{(p)}\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Enfin, pour tout entier j compris entre 1 et n, on note :

$$m_j^{(p)} = \min_{1\leq k\leq n} a_{k,j}^{(p)},\ M_j^{(p)} = \max_{1\leq k\leq n} a_{k,j}^{(p)}.$$

Q23. Encadrement

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$0 < m_j^{(p)} \leq m_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p+1)} \leq M_j^{(p)}.$$

Q24. Minoration

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$m_j^{(p+1)} - m_j^{(p)} \geq m\left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}\right) \quad \text{et} \quad M_j^{(p)} - M_j^{(p+1)} \geq m\left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}\right).$$

Q25. Majoration

Montrer que, pour tout entier naturel non nul p et tout entier j compris entre 1 et n, on a :

$$M_j^{(p+1)} - m_j^{(p+1)} \leq (1-2m)\left(M_j^{(p)} - m_j^{(p)}\right).$$

Q26. Convergence de ces suites

En déduire que, pour tout entier j compris entre 1 et n, les suites $\left(m_j^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\left(M_j^{(p)}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

Q27. Conclusion

En déduire que la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice L stochastique dont toutes les lignes sont identiques.

FIN