



CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

# Mathématiques 2

PC

2016

4 heures

Calculatrices autorisées

Dans tout le texte,  $\mathbb{N}$  est l'ensemble des entiers naturels,  $\mathbb{R}$  l'ensemble des réels,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et  $\mathbb{R}_n[X]$  est l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré au plus  $n$ .

Pour  $a < b$  dans  $\mathbb{Z}$ , on note  $\llbracket a, b \rrbracket$  l'ensemble  $[a, b] \cap \mathbb{Z}$ .

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on note  $P_k$  le polynôme  $X^{k-1}$ . On rappelle que  $\mathbb{R}_n[X]$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n+1$  dont la famille  $(P_k)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$  est une base. Pour  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on note  $\deg(P)$  le degré de  $P$  et, lorsque  $P$  est non nul,  $\text{cd}(P)$  désigne le coefficient dominant de  $P$ , c'est-à-dire le coefficient du monôme  $X^{\deg(P)}$ .

Pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ , le coefficient binomial  $\binom{k}{j}$  vaut  $\frac{k!}{j!(k-j)!}$ .

Pour un ensemble  $E$  et  $f : E \rightarrow E$ , on définit par récurrence sur  $k \in \mathbb{N}$  l'application  $f^k : E \rightarrow E$  de la façon suivante :

$$f^0 = \text{Id}_E \quad \text{et} \quad f^{k+1} = f \circ f^k$$

Si  $f$  est bijective, on note  $f^{-1}$  la réciproque de  $f$  et pour  $k \in \mathbb{N}$ , on note  $f^{-k} = (f^{-1})^k$ .

Pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , on note  $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées réelles de taille  $p$ .

## I L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

### I.A – L'opérateur de translation

L'opérateur de translation est l'endomorphisme  $\tau$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  donné par

$$\tau : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) \end{cases}$$

**I.A.1)** Pour un polynôme non nul  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , exprimer  $\deg(\tau(P))$  et  $\text{cd}(\tau(P))$  à l'aide de  $\deg(P)$  et  $\text{cd}(P)$ .

**I.A.2)** Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Pour  $k \in \mathbb{N}$ , donner l'expression de  $\tau^k(P)$  en fonction de  $P$ .

**I.A.3)** Donner la matrice  $M = (M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n+1}$  de  $\tau$  dans la base  $(P_k)_{k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}$ . On exprimera les coefficients  $M_{i,j}$  en fonction de  $i$  et  $j$ .

**I.A.4)** Préciser l'ensemble des valeurs propres de  $\tau$ . L'application  $\tau$  est-elle diagonalisable ?

**I.A.5)** L'application  $\tau$  est-elle bijective ? Si oui, préciser  $\tau^{-1}$ . L'expression de  $\tau^j$  trouvée à la question I.A.2 pour  $j \in \mathbb{N}$  est-elle valable pour  $j \in \mathbb{Z}$  ?

**I.A.6)** Que vaut  $M^{-1}$  ? Exprimer les coefficients  $(M^{-1})_{i,j}$  en fonction de  $i$  et  $j$ .

**I.A.7)** On se donne une suite réelle  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et on définit pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$

$$v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u_j \tag{I.1}$$

Déterminer une matrice  $Q \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$  telle que

$$\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

**I.A.8)** En déduire la formule d'inversion : pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$u_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j \tag{I.2}$$

**I.A.9)** On considère un réel  $\lambda$  et la suite  $(u_k = \lambda^k)_{k \in \mathbb{N}}$ . Quelle est la suite  $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$  définie par la formule (I.1) ? Vérifier alors la formule (I.2).

**I.B – L'opérateur de différence**

L'opérateur de différence est l'endomorphisme  $\delta$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  tel que  $\delta = \tau - \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$  :

$$\delta : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P(X) \mapsto P(X+1) - P(X) \end{cases}$$

**I.B.1)** Pour un polynôme non constant  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , exprimer  $\deg(\delta(P))$  et  $\text{cd}(\delta(P))$  à l'aide de  $\deg(P)$  et  $\text{cd}(P)$ .

**I.B.2)** En déduire le noyau  $\ker(\delta)$  et l'image  $\text{Im}(\delta)$  de l'endomorphisme  $\delta$ .

**I.B.3)** Plus généralement, pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , montrer les égalités suivantes :

$$\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \quad \text{et} \quad \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X] \quad (\text{I.3})$$

**I.B.4)** Pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , exprimer  $\delta^k(P)$  en fonction des  $\tau^j(P)$  pour  $j \in \llbracket 0, k \rrbracket$ .

**I.B.5)** Soit  $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ . Montrer que

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0 \quad (\text{I.4})$$

**I.B.6)** Dans cette question, on se propose de montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire  $u : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$  telle que  $u \circ u = \delta$ . On suppose, par l'absurde, qu'une telle application  $u$  existe.

a) Montrer que  $u$  et  $\delta^2$  commutent.

b) En déduire que  $\mathbb{R}_1[X]$  est stable par l'application  $u$ .

c) Montrer qu'il n'existe pas de matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  telle que

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Conclure.

**I.B.7)** Dans cette question, on cherche tous les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}_n[X]$  stables par l'application  $\delta$ .

a) Pour un polynôme non nul  $P$  de degré  $d \leq n$ , montrer que la famille  $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$  est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?

b) En déduire que si  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_n[X]$  stable par  $\delta$  et non réduit à  $\{0\}$ , il existe un entier  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$  tel que  $V = \mathbb{R}_d[X]$ .

**II Applications en combinatoire**

Pour tout couple  $(p, k)$  d'entiers naturels non nuls, on note  $S(p, k)$  le nombre de surjections de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, k \rrbracket$ . De façon cohérente, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $S(p, 0) = 0$ .

**II.A – Quelques cas particuliers**

**II.A.1)** Que vaut  $S(p, n)$  pour  $p < n$  ?

**II.A.2)** Déterminer  $S(n, n)$ .

**II.A.3)** Déterminer  $S(n+1, n)$ .

**II.B – Recherche d'une expression générale**

**II.B.1)** Combien y a-t-il d'applications de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  ?

**II.B.2)** Pour  $p \geq n$ , établir la formule

$$n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S(p, k) \quad (\text{II.1})$$

où  $S(p, 0) = 0$  par convention.

**II.B.3)** En déduire une expression de  $S(p, n)$  pour  $p \geq n$ .

**II.B.4)** En relisant la question I.B.5, commenter la cohérence de cette expression pour  $p < n$ .

**II.C –** Simplifier autant que possible les expressions suivantes :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1}$$

### III Étude d'une famille de polynômes

On considère la famille de polynômes

$$\begin{cases} H_0 = 1 \\ H_k = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \quad \text{pour } k \in \llbracket 1, n \rrbracket \end{cases}$$

#### III.A – Généralités

**III.A.1)** Montrer que la famille  $(H_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**III.A.2)** Calculer  $\delta(H_0)$  et, pour  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , exprimer  $\delta(H_k)$  à l'aide de  $H_{k-1}$ .

**III.A.3)** La matrice  $M$  définie à la question I.A.3 et la matrice  $M'$  de taille  $n+1$  donnée par

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

**III.A.4)** Montrer que, pour  $k, l \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$\delta^k(H_l)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

**III.A.5)** Montrer que, pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,

$$P = \sum_{k=0}^n (\delta^k(P))(0) H_k$$

#### III.B – Étude d'un exemple

**III.B.1)** Donner les coordonnées du polynôme  $X^3 + 2X^2 + 5X + 7$  dans la base  $(H_0, H_1, H_2, H_3)$  de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

**III.B.2)** En déduire un polynôme  $P \in \mathbb{R}_5[X]$  tel que

$$\delta^2(P) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$$

**III.B.3)** Déterminer les suites réelles  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  telles que

$$u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = k^3 + 2k^2 + 5k + 7 \quad (k \in \mathbb{N})$$

#### III.C – Polynômes à valeurs entières

**III.C.1)** Soit  $k \in \mathbb{Z}$ . Calculer  $H_n(k)$ . On distinguera trois cas :  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $k \geq n$  et  $k < 0$ . Pour ce dernier cas, on posera  $k = -p$ .

**III.C.2)** En déduire que  $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ , c'est-à-dire que  $H_n$  est à valeurs entières sur les entiers.

**III.C.3)** Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  à valeurs entières sur les entiers. Montrer que  $\delta(P)$  est aussi à valeurs entières sur les entiers.

**III.C.4)** Montrer que  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans la base  $(H_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  sont entières.

**III.C.5)** Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  de degré  $d \in \mathbb{N}$ . Montrer que si  $P$  est à valeurs entières sur les entiers alors  $d!P$  est un polynôme à coefficients entiers. Étudier la réciproque.

### IV Généralisation de l'opérateur de différence et application

Pour une application  $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , on définit l'application

$$\delta(f) : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x+1) - f(x) \end{cases}$$

#### IV.A –

**IV.A.1)** Montrer que  $\delta(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Comparer  $(\delta(f))'$  et  $\delta(f')$ .

**IV.A.2)** Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $x > 0$ , exprimer  $(\delta^n(f))(x)$  à l'aide des coefficients binomiaux  $\binom{n}{j}$  et des  $f(x+j)$  (où l'indice  $j$  appartient à  $\llbracket 0, n \rrbracket$ ).

**IV.A.3)** Expliquer pourquoi, pour tout  $x > 0$ , il existe un  $y_1 \in ]0, 1[$  tel que

$$(\delta(f))(x) = f'(x + y_1)$$

**IV.A.4)** En déduire que pour tout  $x > 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un  $y_n \in ]0, n[$  tel que

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x + y_n). \quad (\text{IV.1})$$

On pourra procéder par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}^*$  et utiliser les trois questions précédentes.

**IV.B** – On considère dans toute la suite de cette partie un réel  $\alpha$ . On suppose que pour tout nombre  $p$  premier,  $p^\alpha$  est un entier naturel. On se propose de montrer que  $\alpha$  est alors un entier naturel.

**IV.B.1)** Montrer que pour tout entier  $k$  strictement positif,  $k^\alpha$  appartient à  $\mathbb{N}^*$ .

**IV.B.2)** Montrer que  $\alpha$  est positif ou nul.

**IV.B.3)** On considère l'application  $f_\alpha$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f_\alpha(x) = x^\alpha$ . Montrer que  $\alpha$  est un entier naturel si et seulement si l'une des dérivées successives de  $f_\alpha$  s'annule en au moins un réel strictement positif.

**IV.C** – On applique la relation (IV.1) à la fonction  $f_\alpha$  et à l'entier  $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1$  (où  $\lfloor \cdot \rfloor$  désigne la partie entière). On choisit désormais  $x \in \mathbb{N}^*$ .

**IV.C.1)** Montrer que l'expression

$$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x+j)$$

est un entier relatif.

**IV.C.2)** Les notations sont celles de la question IV.A.4. Quelle est la limite de l'expression  $f_\alpha^{(n)}(x + y_n)$  quand  $x \in \mathbb{N}^*$  tend vers  $+\infty$  ?

**IV.C.3)** Conclure.

---

• • • FIN • • •

---