

**CONCOURS COMMUNS
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE MP****MATHEMATIQUES 1****Mardi 3 mai : 14 h - 18 h**

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème tous indépendants.

EXERCICE I

On considère l'équation différentielle (E) : $x^2 y'' + (x^2 - x)y' + 2y = 0$.

I.1. Existe-t-il des solutions non nulles de l'équation (E) développables en série entière sur un intervalle $] -r, r[$ ($r > 0$) de \mathbb{R} ?

EXERCICE II

II.1. Démontrer que la famille $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}} \right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

II.2. Soit X et Y deux variables aléatoires sur un même espace probabilisé à valeurs dans \mathbb{N} . On suppose que la loi conjointe du couple (X, Y) vérifie :

$$\text{pour tout } (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = P[(X = i) \cap (Y = j)] = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}.$$

II.2.a. Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.

II.2.b. Démontrer que les variables aléatoires X et Y suivent une même loi.

II.2.c. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

PROBLÈME : Fonction Digamma**Partie préliminaire****III.1.**

III.1.a. Soit $x \in]0, +\infty[$, démontrer que la fonction $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

III.1.b. On note, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1} dt$ (fonction Gamma d'Euler).

Démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) > 0$.

III.1.c. Démontrer que la fonction Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$ puis exprimer $\Gamma'(x)$ sous forme d'intégrale.

III.2. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $u_n = \int_{n-1}^n \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n}$.

III.2.a. Utiliser un théorème du cours pour justifier simplement que la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

III.2.b. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

Démontrer que la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ converge.

La limite de la suite $(H_n)_{n \geq 1}$ sera notée γ dans tout le sujet (γ est appelée la constante d'Euler). Dans la suite de ce problème, on définit pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ appelée fonction Digamma.

Expression de la fonction Digamma à l'aide d'une série

III.3. Pour $x \in]0, +\infty[$ et pour tout entier $n \geq 1$, on définit la fonction f_n sur $]0, +\infty[$ telle que :

$$\text{pour tout } t \in]0, n], f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} \text{ et pour tout } t \in]n, +\infty[, f_n(t) = 0.$$

III.3.a. Démontrer que pour tout $x < 1$, $\ln(1-x) \leq -x$.

En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, pour tout $x \in]0, +\infty[$ et tout $t \in]0, +\infty[$, $0 \leq f_n(t) \leq e^{-t} t^{x-1}$.

III.3.b. En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1} dt$.

III.4. On pose, pour n entier naturel et pour $x \in]0, +\infty[$, $I_n(x) = \int_0^1 (1-u)^n u^{x-1} du$.

III.4.a. Après avoir justifié l'existence de l'intégrale $I_n(x)$, déterminer, pour $x > 0$ et pour $n \geq 1$, une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n-1}(x+1)$.

III.4.b. En déduire, pour n entier naturel et pour $x \in]0, +\infty[$ une expression de $I_n(x)$.

III.4.c. Démontrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$ (formule de Gauss).

III.5. Pour tout entier $n \geq 1$, on note toujours $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$.

En remarquant que pour $n \geq 1$ et $x \in]0, +\infty[$, $\frac{1}{n^x} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k}\right) = e^{xH_n} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right]$, démontrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\frac{1}{\Gamma(x)} = x e^{\gamma x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left[\left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}\right]$ (formule de Weierstrass).

III.6.

III.6.a. En déduire que la série $\sum_{k \geq 1} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right]$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

III.6.b. On pose, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{x}{k}\right) - \frac{x}{k} \right]$. Démontrer que l'application g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et exprimer $g'(x)$ comme somme d'une série de fonctions.

III.6.c. En déduire que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\psi(x) = \frac{-1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right)$. On rappelle que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$.

III.7.

III.7.a. Que vaut $\psi(1)$? En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.

III.7.b. Calculer, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\psi(x+1) - \psi(x)$ puis démontrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\psi(n) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

III.7.c. On pose, pour tout $(x, y) \in]0, +\infty[^2$ et k entier naturel, $j_k(y) = \frac{1}{k+y+1} - \frac{1}{k+y+x}$.

Démontrer que la série $\sum_{k \geq 0} j_k$ converge uniformément sur $]0, +\infty[$.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\psi(x+n) - \psi(1+n))$.

III.8. Déterminer l'ensemble des applications f définies sur $]0, +\infty[$ et à valeurs réelles vérifiant les trois conditions :

- $f(1) = -\gamma$,
- pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f(x+1) = f(x) + \frac{1}{x}$,
- pour tout $x \in]0, +\infty[$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (f(x+n) - f(1+n)) = 0$.

Autour de la fonction Digamma

III.9. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n .

On effectue un premier tirage d'une boule dans l'urne et on adopte le protocole suivant :
 si on a tiré la boule numéro k , on la remet alors dans l'urne
 avec k nouvelles boules toutes numérotées k .

Par exemple, si on a tiré la boule numéro 3, on remet quatre boules de numéro 3 dans l'urne (la boule tirée plus 3 nouvelles boules numéro 3).

On effectue ensuite un deuxième tirage d'une boule.

On note X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au numéro de la boule choisie au premier tirage (respectivement au deuxième tirage).

III.9.a. Déterminer la loi de la variable aléatoire X ainsi que son espérance $E(X)$.

III.9.b. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y et vérifier que pour tout entier naturel non nul k , $P(Y = k) = \frac{1}{n} \left(\psi(2n+1) - \psi(n+1) + \frac{k}{n+k} \right)$.

III.9.c. Calculer l'espérance $E(Y)$. On pourra utiliser, sans démonstration, que

$$\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n(n+k)} = \frac{1-n}{2} + n(\psi(2n+1) - \psi(n+1)).$$

Fin de l'énoncé