028

e3a

CONCOURS ARTS ET MÉTIERS ParisTech - ESTP - POLYTECH

Épreuve de Mathématiques 2 PSI

Durée 3 h

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, d'une part il le signale au chef de salle, d'autre part il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage de calculatrices est interdit.

AVERTISSEMENT

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction, la clarté et la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans **l'appréciation des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Dans tout le problème :

(a) E est un espace euclidien de dimension $p \geqslant 1$ dans lequel le produit scalaire sera noté $(\,|\,)$ et la norme associée $\|\ \|$,

(b) $\mathscr{S}(E)$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ constitué des endomorphismes symétriques de E,

(c) $T(E)$ désigne l'ensemble des éléments de $\mathscr{S}(E)$ de rang inférieur ou égal à 1 et qui vérifient :

$$\forall x \in E, \quad (u(x)|x) \geqslant 0$$

Préliminaires

1. Justifier que $T(E)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.

2. Si M est une matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on notera $\mathbf{tr}(M)$ la trace de la matrice M. Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

2.1 Prouver que : $\mathbf{tr}(AB) = \mathbf{tr}(BA)$

2.2 On suppose que B est semblable à A. Comparer $\mathbf{tr}(A)$ et $\mathbf{tr}(B)$.

2.3 Donner la définition de la trace d'un endomorphisme de E.

3. Rappeler la définition d'un hyperplan de E.

Soit H un hyperplan de E et G son complémentaire dans E.

<u>Répondre en le démontrant si les assertions suivantes sont vraies ou fausses</u>

(1) G est un sous-espace supplémentaire de H.

(2) Pour tout vecteur a de G, Vect(a) est supplémentaire de H dans E.

(3) Pour tout vecteur a non nul et orthogonal à H, Vect(a) est supplémentaire de H dans E.

(4) Le noyau de l'application $\mathbf{tr}$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$.

(5) Un endomorphisme de E est de rang 1 si et seulement si son noyau est un hyperplan de E.

4. Montrer que l'application :

$$(f,g) \in \mathscr{S}(E)^2 \longmapsto < f,g >= \mathbf{tr}(f\,o\,g)$$

est un produit scalaire.

On notera pour la suite N la norme associée à ce produit scalaire.

5. Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 1 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé.

Donner les éléments propres de la matrice A.

Partie 1

Soient $a \in E$ et u_a l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall\, x \in E, \quad u_a(x) = (x|a)\ a$$

1. Montrer que $u_a \in T(E)$.

2. On suppose dans cette question que $a \neq 0$.

2.1 Ecrire la matrice de u_a dans une base $\mathscr{B}$ de E constituée du vecteur a et d'une base de $(\mathrm{Vect}(a))^{\perp}$.

2.2 Déterminer alors $\mathbf{tr}(u_a)$ et $\mathbf{tr}(u_a \circ u_a)$ en fonction de a.

2.3 Soit f un endomorphisme de E.

Déterminer les éléments diagonaux de la matrice de $f \circ u_a$ dans la base $\mathscr{B}$ définie précédemment.

2.4 Calculer alors $\mathbf{tr}(f\ o\ u_a)$ en fonction de a.

3. Soit $u \in T(E)$, u non nul et b un vecteur non nul de $\mathrm{Im}(u)$.

3.1 Montrer que b est un vecteur propre de u associé à une valeur propre μ positive.

3.2 Prouver que : $\forall\, x \in E,\ u(x) = \dfrac{\mu}{\|b\|^2}\ (x|b)\ b$.

3.3 En déduire que $\mu > 0$.

3.4 Montrer qu'il existe au moins un vecteur a de E tel que $u = u_a$.

4. L'application $\varphi : a \in E \longmapsto \varphi(a) = u_a \in T(E)$ est-elle :

- injective ?
- surjective ?

Partie 2

Pour cette partie du problème f est un endomorphisme de $\mathscr{S}(E)$, fixé.

Pour tout vecteur x de E, on pose $\Phi(x) = [N(f - u_x)]^2$ et $m(f) = \underset{x \in E}{\mathrm{Inf}}\, \Phi(x)$.

Pour tout vecteur x de E et tout vecteur y de E tel que $\|y\| = 1$, soit $h_x : t \in \mathbb{R} \longmapsto h_x(t) = \Phi(x + ty)$.

1. Justifier l'existence de $m(f)$.

2. Prouver que : $\forall\, x \in E,\ \Phi(x) = [N(f)]^2 - 2\,(x|f(x)) + \|x\|^4$.

3. Montrer que h_x est une fonction polynômiale dont on précisera les coefficients.

4. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathscr{C} = (e_1, ..., e_p)$ de E et de réels $(\lambda_i)_{i \in [\![1,p]\!]}$ vérifiant :

$$\forall\, i \in [\![1,p]\!],\ f(e_i) = \lambda_i\, e_i \quad \text{et} \quad \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant ... \leqslant \lambda_p$$

5. Calculer alors $N(f)$ à l'aide des réels λ_i, $i \in [\![1,p]\!]$.

6. Exprimer $\alpha = \displaystyle\operatorname*{Sup}_{z \in E,\ \|z\|=1} (z|f(z))$ à l'aide des réels λ_i, $i \in [\![1,p]\!]$.

Déterminer l'ensemble des vecteurs z de E unitaires tels que $(z|f(z)) = \alpha$.

7. On suppose que $m(f)$ est atteint en $a \in E$.

7.1 Déterminer $h_a'(0)$

7.2 Prouver que $f(a) = \|a\|^2\, a$.

7.3 Prouver que pour tout réel t et tout vecteur y de E de norme 1 :

$$\Phi(a+ty) - \Phi(a) = t^2\, \left[\, (\, t + 2\,(y|a)\,)^2 + 2\, \left(\|a\|^2 - (y|f(y))\,\right)\,\right]$$

7.4 Prouver que :

$$m(f) = \Phi(a) \iff \left\{ \begin{array}{l} f(a) = \|a\|^2\, a \\ \text{et} \\ \forall\, y \in E \ \text{ tel que } \ \|y\| = 1, \quad (y|f(y)) \leqslant \|a\|^2 \end{array} \right.$$

8. On suppose que $\lambda_p \leqslant 0$.

8.1 Prouver que : $m(f) = \Phi(a)$ si et seulement si $a = 0$.

8.2 Déterminer $m(f_A)$ où f_A est l'endomorphisme qui a été défini à la question **5.** des préliminaires.

9. On suppose que $\lambda_p > 0$.

9.1 Démontrer que $m(f) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i^2$.

9.2 Prouver que : $m(f) = \Phi(x) \iff \left\{ \begin{array}{l} x \in \ker\,(f - \lambda_p\, \mathrm{Id}_E) \\ \text{et} \\ \|x\| = \sqrt{\lambda_p} \end{array} \right.$

Partie 3

Dans cette partie, on prend $E = \mathbb{R}^p$ euclidien usuel.

1. Soit $M = (m_{ij}) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ symétrique et telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall\, (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad m_{ij} \geqslant 0 \\ \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \displaystyle\sum_{j=1}^{p} m_{ij} = 1 \end{array} \right.$$

On note f_M l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ canoniquement associé à la matrice M.

1.1 Prouver que $\lambda = 1$ est valeur propre et donner un vecteur propre associé.

1.2 Soit λ une valeur propre de M et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ un vecteur propre associé.

Soit $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $|x_k| = \underset{j \in [\![1,p]\!]}{\text{Max}} |x_j|$.

En considérant la k-ième ligne du système $MX = \lambda X$, prouver que $|\lambda| \leqslant 1$.

1.3 Déterminer alors un vecteur a de $\mathbb{R}^p$ tel que $\Phi(a) = m(f_M)$. (On ne cherchera pas à calculer la valeur de $m(f_M)$).

1.4 En déduire l'existence d'un endomorphisme v de $T(E)$ tel que : $[N(f_M - v)]^2 = m(f_M)$.

1.5 Reconnaître la nature géométrique de l'endomorphisme v et donner ses éléments remarquables.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et f_B l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ qui lui est canoniquement associé.

Calculer $m(f_B)$.

Trouver un vecteur $b \in \mathbb{R}^p$ tel que $[N(f_B - u_b)]^2 = m(f_B)$.

3. On prend dans cette question $p > 1$.

Soit $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ et f_C l'endomorphisme de $\mathbb{R}^p$ qui lui est canoniquement associé.

3.1 Déterminer les éléments propres de la matrice C.

3.2 Calculer $m(f_C)$.

3.3 Trouver un vecteur c de $\mathbb{R}^p$ tel que $\Phi(c) = m(f_C)$ et un endomorphisme $w \in T(E)$ tel que $m(f_C) = [N(f_C - w)]^2$.

3.4 Cet endomorphisme w est-il unique ?