

SESSION 2015

PSIMA02

**CONCOURS COMMUNS  
POLYTECHNIQUES****EPREUVE SPECIFIQUE - FILIERE PSI****MATHEMATIQUES****Durée : 4 heures**

*N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*

**Les calculatrices sont autorisées**

**Notations**

- $\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des réels et  $\mathbb{R}^+$  désigne l'intervalle  $[0, +\infty[$ .
- Si  $I$  est un intervalle réel non réduit à un point, on note  $\mathcal{C}^1(I)$  l'espace vectoriel des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  définies sur  $I$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
- Soit  $\mathbb{K}$  l'ensemble  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Pour tout entier naturel non nul,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  désigne le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices à  $n$  lignes et  $n$  colonnes et à coefficients dans  $\mathbb{K}$ .
- Un vecteur de  $\mathbb{K}^n$  est noté :

$$X = (x_k)_{1 \leq k \leq n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

- Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est notée :

$$A = ((a_{j,k}))_{1 \leq j,k \leq n}$$

où  $a_{j,k}$  est le coefficient de  $A$  situé en ligne  $j$  et colonne  $k$ .

- On dit qu'une application :

$$\begin{aligned} M : I &\rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ t &\mapsto M(t) = ((a_{j,k}(t)))_{1 \leq j,k \leq n} \end{aligned}$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ , si pour tout couple  $(j, k)$  la fonction  $t \mapsto a_{j,k}(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$  et dans ce cas, on note  $M'(t)$  la matrice  $((a'_{j,k}(t)))_{1 \leq j,k \leq n}$ .

Soient  $I$  un intervalle réel non réduit à un point et  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  une fonction continue.

Dans ce problème, on s'intéresse au système différentiel :

$$X'(t) = A(t) X(t) \quad (E)$$

où  $X : I \rightarrow \mathbb{C}^n$  est une application de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**A l'exception de la question I.2 utilisée tout au long du sujet, les trois parties sont indépendantes.**

## Partie I

### Quelques exemples d'étude d'un système différentiel

**I.1** Qu'affirme le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire quant à la structure de l'ensemble des solutions de  $(E)$  ?

#### I.2 Vecteurs propres communs

On suppose qu'il existe un vecteur non nul  $V \in \mathbb{C}^n$  et une fonction continue  $\lambda : I \rightarrow \mathbb{C}$  tels que pour tout  $t \in I$  on ait :

$$A(t)V = \lambda(t)V.$$

Montrer que la fonction :

$$\begin{aligned} X : I &\rightarrow \mathbb{C}^n \\ t &\mapsto \alpha(t)V \end{aligned}$$

est solution de  $(E)$  si, et seulement si, la fonction  $\alpha$  est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on précisera et pour laquelle on donnera une expression des solutions.

#### I.3 Un premier exemple

On suppose pour cette question que  $n = 2$ . Soient  $a$  et  $b$  deux complexes tels que  $a - 1 - b \neq 0$ . On suppose que, pour tout  $t \in I = \mathbb{R}$ , on a :

$$A(t) = \begin{pmatrix} a & 1 - a \\ b & 1 - b \end{pmatrix}.$$

Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions de  $(E)$ .

#### I.4 Un deuxième exemple

On suppose également pour cette question que  $n = 2$ . Soient  $\mu$  une constante complexe et  $a, b$  des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{C}$ , la fonction  $b$  ne s'annulant jamais sur  $I$ . On suppose que pour tout réel  $t \in I$ , on a :

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & \mu b(t) \\ b(t) & a(t) + (\mu - 1)b(t) \end{pmatrix}.$$

**I.4.1** Traiter le cas particulier où  $\mu = 1$ .

**I.4.2** Montrer qu'il existe deux vecteurs non nuls  $V_1$  et  $V_2$  dans  $\mathbb{C}^2$  et deux fonctions continues  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de  $I$  dans  $\mathbb{C}$  tels que pour tout  $t \in I$  on ait :

$$A(t)V_1 = \lambda_1(t)V_1 \text{ et } A(t)V_2 = \lambda_2(t)V_2.$$

**I.4.3** Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $\mu$  pour que l'on ait :

$$\forall t \in I, \quad \lambda_1(t) \neq \lambda_2(t).$$

On supposera cette condition vérifiée pour la question suivante.

**I.4.4** Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions de  $(E)$ .

## Partie II

### Développement en série entière des solutions pour $A$ constante

#### II.1 Norme matricielle induite

On se donne une norme vectorielle  $X \mapsto \|X\|$  sur  $\mathbb{C}^n$  et on lui associe la fonction  $N$  définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad N(A) = \sup_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{\|AX\|}{\|X\|}.$$

**II.1.1** Montrer que l'application  $N$  définit une norme sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .

**II.1.2** Montrer que, pour toutes matrices  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ , on a :

$$N(AB) \leq N(A)N(B).$$

#### II.2 Développement en série entière des solutions

**II.2.1** On suppose pour cette question, que  $I = \mathbb{R}$  et que la fonction  $A$  est constante.

Montrer que si  $X$  est solution de  $(E)$ , elle est alors de classe  $C^\infty$  sur  $I$  et que pour tout entier naturel  $k$ , on a :

$$X^{(k)}(t) = A^k X(t)$$

(avec la convention que  $X^{(0)} = X$  et  $A^0 = I_n$ ).

**II.2.2** On note  $X_0 = X(0)$ . Montrer que pour tout entier naturel  $p$  et tout réel  $t \in I$ , on a :

$$X(t) = \left( \sum_{k=0}^p \frac{t^k}{k!} A^k \right) X_0 + \int_0^t \frac{(t-u)^p}{p!} A^{p+1} X(u) du.$$

**II.2.3** Montrer que :

$$X(t) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \left( \sum_{k=0}^p \frac{t^k}{k!} A^k \right) X_0$$

et en déduire que les coordonnées de  $X$  sont développables en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

### II.3 Un exemple

On suppose pour cette question, que  $n = 4$ , que  $I = \mathbb{R}$  et que la fonction  $t \mapsto A(t)$  est constante et égale à :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{C}).$$

**II.3.1** Calculer le polynôme caractéristique  $P_A(X)$  de  $A$ .

**II.3.2** Soit  $k$  un entier naturel non nul.

Montrer que la famille  $(1, X, X(X-1), X(X-1)^2)$  est une base de  $\mathbb{C}_3[X]$ , puis exprimer le reste de la division euclidienne de  $X^k$  par  $P_A(X)$  dans cette base.

**II.3.3** En déduire, pour tout entier  $k \geq 1$ , une expression de  $A^k$  en fonction de  $A$ ,  $A(A-I_4)$  et  $A(A-I_4)^2$ .

**II.3.4** Calculer  $A(A-I_4)$  et  $A(A-I_4)^2$ .

**II.3.5** Préciser le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} (n-1)$$

ainsi que sa somme.

**II.3.6** Soit  $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^4$ . Déterminer la solution du problème de Cauchy linéaire

$$\begin{cases} X' & = & AX \\ X(0) & = & X_0 \end{cases}.$$

## Partie III

### Etude de deux fonctions

#### III.1 L'intégrale de Gauss

**III.1.1** Montrer que l'intégrale de la fonction  $f : t \mapsto e^{-t^2}$  est convergente sur  $\mathbb{R}^+$ .

**III.1.2** Montrer que les fonctions  $F$  et  $G$  définies sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, F(x) = \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2, G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} dt$$

sont de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ , puis préciser les dérivées d'ordre 1 de  $F$  et de  $G$ .

**III.1.3** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, F'(x) + G'(x) = 0$$

et en déduire la valeur de  $F + G$ .

**III.1.4** Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}.$$

**III.1.5** En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

#### III.2 Les fonctions $u$ et $v$

**III.2.1** Montrer que les fonctions :

$$u(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} \cos(tx)}{\sqrt{x}} dx \text{ et } v(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} \sin(tx)}{\sqrt{x}} dx$$

sont bien définies et de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**III.2.2** Montrer que la fonction  $w = u + iv$  est solution d'une équation différentielle, puis en déduire que :

$$X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

est solution d'un système différentiel du premier ordre

$$X'(t) = A(t) X(t) \quad (E_1)$$

où la fonction matricielle  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  est à déterminer.

---

**III.2.3** Déterminer, pour tout réel  $t$ , les valeurs propres complexes et les sous-espaces propres de  $A(t)$ .

**III.2.4** Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions sur  $\mathbb{C}$  du système  $(E_1)$  et en déduire la solution générale de  $(E_1)$ .

**III.2.5** Calculer  $u(0)$ ,  $v(0)$  et en déduire l'expression réelle de  $u$  et de  $v$ .

**Fin de l'énoncé**