
ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES
CONCOURS D'ADMISSION 2015 **FILIÈRE PC**

COMPOSITION DE PHYSIQUE – A – (XE)

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.
On se contentera, pour les applications numériques, d'un ou deux chiffres significatifs.

* * *

Objectif Lune

Ce problème traite de la télémétrie laser appliquée à la mesure précise de la distance séparant la Terre de la Lune. Il se compose d'un texte de 3 pages, de deux figures montrant des données expérimentales et de 30 questions d'analyse et de compréhension auxquelles le candidat doit répondre. Ces questions sont regroupées en six courtes parties indépendantes.

Commencez par lire attentivement le texte intitulé "La télémétrie laser-Lune". Cela devrait vous prendre entre 20 et 30 minutes.

Puis répondez aux questions de la partie intitulée "Analyse de l'article". Elles ne sont pas forcément ordonnées par difficulté croissante et certaines d'entre elles ont une formulation ouverte. Dans ce cas, toutes vos initiatives de résolution sont bienvenues à condition de justifier et de détailler systématiquement votre démarche. Si nécessaire, vous citerez précisément la partie du texte qui appuie votre raisonnement (les lignes sont numérotées de 1 à 236 à cet effet). Les hypothèses des modélisations doivent être clairement précisées et toutes les approximations doivent être explicitées et justifiées. Les calculs devront être menés sous forme littérale, avec pour objectif final d'obtenir une valeur numérique.

Données utiles pour l'analyse du texte

Accélération de la pesanteur $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$	Rayon de la Terre $R_{\oplus} = 6\,400 \text{ km}$
Constante des gaz parfaits $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$	Masse de la Terre $M_{\oplus} = 6,0 \times 10^{24} \text{ kg}$
Masse molaire de l'air $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$	Rayon de la Lune $R_L = R_{\oplus}/4$
Distance Terre-Soleil $D_{\odot} = 150 \times 10^6 \text{ km}$	Masse de la Lune $M_L = M_{\oplus}/81$

Un photon dont la longueur d'onde est de $1 \mu\text{m}$ a une énergie de $2,0 \times 10^{-19} \text{ J}$.

Une année dure $3,1 \times 10^7$ secondes.

Un angle d'une seconde d'arc correspond à $4,8 \times 10^{-6}$ radian.

Le moment d'inertie d'une boule homogène de masse M et de rayon R par rapport à un axe passant par son centre est donné par $I = \frac{2}{5}MR^2$.

α	$\cos \alpha$	α	$\cos \alpha$	α	$\cos \alpha$	α	$\cos \alpha$	α	$\cos \alpha$	α	$\cos \alpha$
35°	0,819	40°	0,766	45°	0,707	50°	0,643	55°	0,574	60°	0,500
36°	0,809	41°	0,755	46°	0,695	51°	0,629	56°	0,559	61°	0,485
37°	0,799	42°	0,743	47°	0,682	52°	0,616	57°	0,545	62°	0,469
38°	0,788	43°	0,731	48°	0,669	53°	0,602	58°	0,530	63°	0,454
39°	0,777	44°	0,719	49°	0,656	54°	0,588	59°	0,515	64°	0,438

Table 1: Extrait d'une table trigonométrique par degré, à 0,001 près.

La télémétrie laser-Lune *

Résumé

La télémétrie laser permet de déterminer avec précision de grandes distances. La cible la plus éloignée jamais atteinte par cette méthode est notre satellite naturel, la Lune. Principe simple et mise en œuvre délicate caractérisent cette technique, utilisée avec succès depuis l'observatoire de la Côte d'Azur. Passée en 10 ans d'une trentaine de centimètres à moins de trois, la précision des mesures devrait atteindre quelques millimètres d'ici 1995. Cela améliorera notre connaissance de la dynamique du système Terre-Lune, de la rotation de la Terre, de l'intérieur de la Lune et permettra de tester la théorie de la gravitation.

1 Mesurer une distance par une durée

Le principe de la télémétrie laser-Lune est simple. Un télescope envoie une impulsion lumineuse vers un réflecteur posé sur la surface lunaire. Une partie de la lumière émise est renvoyée et va, après environ deux secondes et demie, être reçue par le même télescope. Il suffit de dater l'instant de départ de l'impulsion et celui du retour de l'écho pour connaître la durée de trajet. En multipliant cette durée par la vitesse de la lumière, on obtient la longueur du trajet parcouru, égale au double de la distance de notre télescope à la Lune, ou plus précisément au réflecteur visé.

Mais le passage d'une durée à une distance n'est pas aussi simple, notamment à cause de l'atmosphère qui ralentit la lumière et allonge ainsi la durée de son trajet (voir appendice A). Retenons pour l'instant que l'on mesure une durée que l'on peut assimiler à une distance. Quels sont les ordres de grandeur de la conversion durée-distance ? En une nanoseconde la lumière parcourt une trentaine de centimètres. Mesurer la distance de la Lune à quelques centimètres près nécessite donc de maîtriser la mesure de durées à quelques dixièmes de nanoseconde !

La télémétrie lunaire débute avec les vols habités vers la Lune. Les astronautes de la mission Apollo 11 emportaient avec eux le premier panneau de cataphotes auquel viendront se joindre ceux des missions Apollo 14 et Apollo 15 (figure 1). Quelques années plus tard, les soviétiques déposèrent deux véhicules automatiques, Lunakhod 1 et 2, dotés de cataphotes français dont

un seul fonctionne encore. Quatre réflecteurs sont donc aujourd'hui disponibles sur la Lune.

À quoi ressemblent ces cataphotes ? Ce sont des coins de cube qui ont la propriété essentielle de renvoyer la lumière dans la direction d'où elle est arrivée grâce aux réflexions successives sur trois plans réfléchissants perpendiculaires deux à deux. On est ainsi assuré de recevoir des échos de la lumière envoyée, quelles que soient les positions respectives du télescope, qui suit le mouvement de la Terre en rotation sur elle-même et autour du Soleil, et du réflecteur qui se déplace au gré du mouvement de la Lune sur son axe et autour de la Terre.

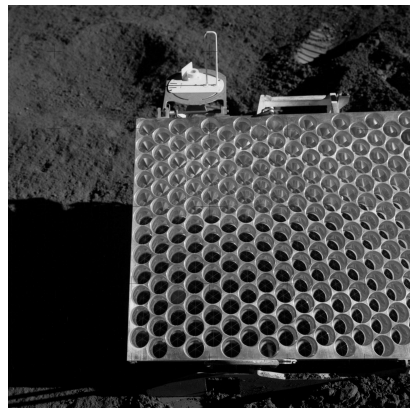


Figure 1: Le réflecteur (12 × 25 cataphotes) déposé sur la Lune par la mission Apollo 15.

* Texte extrait et adapté d'un article publié dans la revue *Images de la physique* en 1992.

2 La chasse aux photons

50 La télémétrie laser-Lune est une technique assez difficile à mettre en œuvre. L'intérêt du laser est qu'il permet d'envoyer de l'ordre de 10^{18} photons en peu de temps. Dans les meilleures conditions, on ne détecte qu'un photon en écho tous
55 les cent tirs ! Sachant que les lasers actuels permettent une cadence de dix tirs par seconde, il faut donc attendre une dizaine de minutes pour détecter une soixantaine de photons.

Sans précautions, ces photons sont noyés dans
60 ceux du ciel si l'on travaille de jour, ceux de la Lune si le réflecteur visé est dans le croissant éclairé, et aussi ceux du détecteur, imparfait. Il faut donc identifier les bons photons – ceux des échos – des mauvais – le bruit. Pour cela, commençons par isoler une zone de quelques secondes d'arc (une dizaine de kilomètres sur la Lune) autour du réflecteur visé. Ensuite, on ne considère que les photons de la bonne couleur. Le laser étant stabilisé en température, sa longueur
65 d'onde est bien définie. Un filtre ayant une bande passante étroite – moins de 0,2 nm – permet de ne détecter que les photons qui ont la bonne longueur d'onde. Malgré ces précautions, on
70 détecterait plus d'un million de photons par seconde si les conditions sont défavorables ! Il faut donc réaliser un ultime filtrage, temporel celui-

ci. Sachant quand l'impulsion laser a été émise, le calculateur qui gère l'expérience en temps réel estime le moment d'arrivée de l'écho grâce à
80 notre bonne connaissance du mouvement de la Lune. Et plutôt que de regarder en permanence, le détecteur électronique (un photomultiplicateur ou une photodiode) ne va s'ouvrir qu'un peu avant le moment prédit, pour se fermer un peu
85 après. Ce très petit intervalle de détection, de l'ordre de cent milliardièmes de seconde, élimine la plus grande partie du bruit. Un traitement statistique des photons reçus permettra enfin de valider la présence de l'écho.

Il est impossible de savoir si le photon de retour que l'on détecte vient du début ou de la fin de l'impulsion laser émise. C'est là l'incertitude fondamentale de la télémétrie laser quand on ne reçoit en écho qu'au plus un photon par tir. Plus
90 l'impulsion émise est courte, plus cette incertitude est faible, mais moins on émet de photons car il est difficile d'émettre beaucoup d'énergie en un temps très faible. La durée de l'impulsion correspond à une incertitude tir à tir d'une dizaine
95 de centimètres sur la mesure de distance, incertitude ramenée à un ou deux centimètres en accumulant les échos sur une dizaine de minutes.

3 Pour quelles applications ?

Pour pouvoir calculer la durée du trajet
105 séparant le télescope du panneau de réflecteurs, il faut modéliser les différents mouvements du système Terre-Lune.

Commençons par le réflecteur dont le déplacement le plus important est celui dû au
110 mouvement de la Lune autour de la Terre. La télémétrie laser-Lune a permis un bond de trois ordres de grandeur dans la précision de détermination des paramètres orbitaux de la Lune. Il en est de même pour sa rotation, synchronisée avec sa révolution (c'est pour cela
115 que la Lune nous montre toujours la même face). En fait, la face visible de la Lune oscille autour d'une position moyenne à cause de l'influence du Soleil et de l'interaction entre la
120 Terre et son satellite, qui ne sont ni sphériques, ni homogènes, ni rigides... La confrontation entre modèles et observations permet notamment d'étudier l'intérieur de la Lune, car la rotation
125 d'un corps sur lui-même dépend de sa structure interne (faites tourner un œuf cru et un œuf dur pour vous en convaincre !) et de sa répartition de

masse. L'étude de l'évolution passée ou future de l'orbite lunaire nécessite aussi la télémétrie laser-Lune, seule méthode capable de fournir une
130 mesure de la décélération séculaire de la Lune et un instantané précis des mouvements actuels.

Passons maintenant au mouvement de la station. Elle se trouve sur la Terre qui tourne sur elle-même en 23 heures et 56 minutes. Cette
135 rotation n'est pas parfaitement régulière car la direction de son axe et sa vitesse fluctuent. Il faut donc modéliser précisément cette rotation à laquelle les mesures sont très sensibles. D'autres techniques contribuent à l'étude de la rotation de la Terre (interférométrie à grande base, télémétrie laser sur satellites...), mais le laser-Lune permet
140 une prédiction rapide, fondée sur des observations récentes de la rotation de la Terre.

Terre et Lune étant en orbite autour du Soleil, la télémétrie laser-Lune contribue à l'élaboration
145 des éphémérides du système solaire. Ainsi, elle permet de mesurer l'angle entre l'écliptique (le plan contenant l'orbite moyenne de la Terre) et le plan équatorial de la Terre, élément clé de la navi-

150 gation spatiale. Elle permet aussi de déterminer le rapport des masses de la Terre et de la Lune.

La télémétrie laser-Lune permet enfin de tester la théorie de la gravitation d'Einstein, la relativité générale. Terre et Lune ont des masses 155 très importantes et des vitesses que l'on ne peut négliger par rapport à la vitesse de la lumière.

La précision relative des mesures de distance, quelques 10^{-11} , rend indispensable la prise en compte de la relativité et permet de tester la validité de ses principes. C'est ainsi que le principe d'équivalence¹ se trouve vérifié avec une très bonne précision pour des corps comme la Terre et la Lune (voir l'appendice C).

Appendices

165 A Vous avez dit distance ?

La durée du trajet aller-retour n'est pas immédiatement convertible en distance car entre l'émission de l'impulsion par le télescope et son arrivée sur la Lune, cette dernière s'est 170 déplacée et le réflecteur avec elle. Entraîné par la rotation de la Terre, le télescope s'est aussi déplacé entre le départ et le retour de l'impulsion. De plus, l'infime ralentissement de la lumière dans l'atmosphère se traduit par un allongement 175 de la durée du trajet. Équivalent à plusieurs mètres sur la distance, cet écart est d'autant plus grand que l'impulsion laser traverse une couche d'atmosphère plus épaisse, donc que la Lune est basse sur l'horizon. Il faut aussi modéliser 180 l'atmosphère le long du trajet de la lumière à partir des paramètres météorologiques mesurés à la station. L'incertitude de cette correction est de quelques millimètres pour une hauteur de 40° au-dessus de l'horizon, mais peut atteindre deux centimètres si la Lune n'est qu'à 15° . Enfin, selon 185 la relativité générale, la durée de propagation de la lumière dans le potentiel gravitationnel d'un objet massif (pour nous, le Soleil essentiellement) est plus longue que celle en l'absence de cet objet. 190 Dans le cas d'un trajet Terre-Lune, ce retard est équivalent à allonger leur distance de près d'une dizaine de mètres !

B Quelques nombres

Le télescope a un diamètre de 1,5 mètre et sa focale est de 30 mètres. À la sortie du télescope, le faisceau a un angle d'ouverture de 1 seconde d'arc 195 mais l'agitation de l'atmosphère augmente cette valeur qui devient de l'ordre de 5 secondes d'arc. Le laser utilisé envoie des impulsions de 600 mJ 200 à une longueur d'onde $1,06 \mu\text{m}$ ou de 300 mJ à

$0,53 \mu\text{m}$. La durée d'une impulsion est de 400 ps et la cadence de tir est de 10 Hz. Le réflecteur de la mission Apollo 15 est composé de 300 cataphotes ayant chacun une ouverture circulaire de 205 $3,8 \text{ cm}$ de diamètre.

C Laser-Lune et relativité

En dehors de l'amélioration de notre connaissance des mouvements de la Lune offerte par les observations laser-Lune, la plus importante application en physique fondamentale a trait à la gravitation. Vérifier que la constante de la gravitation G ne variait pas était l'un des buts annoncés. Une diminution de G au cours du temps se traduirait par une décroissance de la vitesse angulaire orbitale de la Lune, une décélération séculaire donc. Or, les interactions de marée entre la Terre et la Lune sont responsables d'une décélération séculaire de la Lune (le laser-Lune donne -24 secondes d'arc par siècle au carré) qui doit être précisément modélisée pour isoler la contribution d'une éventuelle variation de G . La limite actuelle est $|\dot{G}/G| < 2 \times 10^{-11}/\text{an}$. Une autre application de type relativiste a été suggérée par K. Nordtvedt en 1968 : si la Terre et la Lune ne répondaient pas de la même façon au champ de gravitation du Soleil, violant ainsi le principe d'équivalence de la relativité générale, l'orbite de la Lune autour de la Terre se trouverait allongée le long de l'axe Terre-Soleil. En 1976, deux équipes américaines ont montré qu'aucun effet Nordtvedt n'était mesurable, conduisant à une vérification du principe d'équivalence à 10^{-12} près. Le laser-Lune est à l'heure actuelle le meilleur test du principe d'équivalence pour des corps dont la cohésion est assurée par leur gravitation propre. 235

¹Le principe d'équivalence énonce l'égalité de la masse gravitationnelle et de la masse inertielle de tous les corps. Rappelons qu'on appelle masse inertielle d'un corps celle qui intervient dans la relation fondamentale de la dynamique, c'est-à-dire le rapport de proportionnalité entre les forces appliquées à ce corps et son accélération. La masse gravitationnelle d'un corps est la masse qui intervient dans l'expression de la force de gravitation qu'il subit.

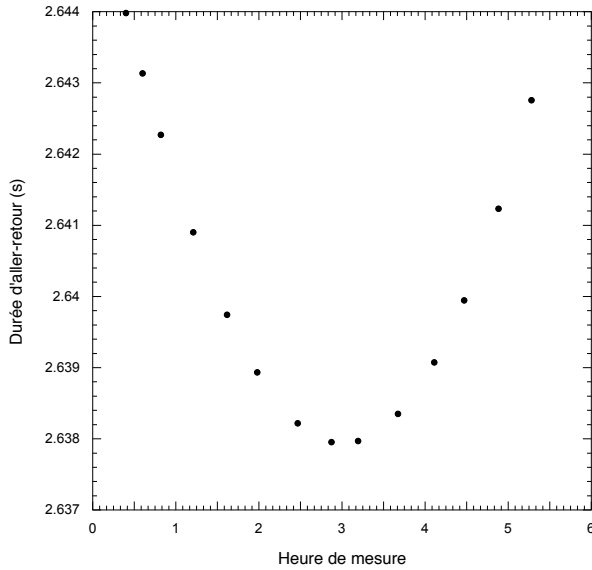


Figure 2: Observations menées dans la nuit du 25 mars 2000, donnant la durée d'aller-retour de la lumière entre l'observatoire et la Lune en fonction de l'heure. Sur l'axe des abscisses, le temps est compté en heures et l'origine correspond à minuit.

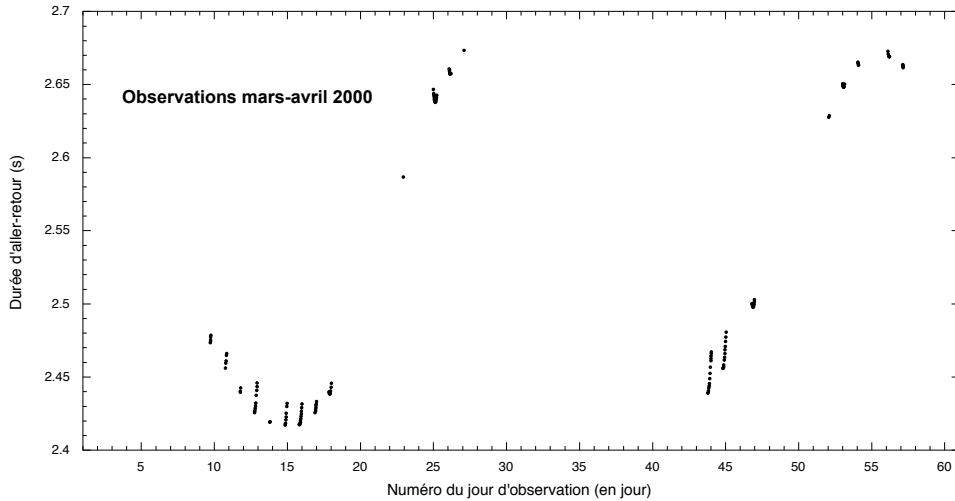


Figure 3: Observations menées aux mois de mars et d'avril 2000, donnant la durée d'aller-retour de la lumière entre l'observatoire et la Lune en fonction du temps. L'axe des abscisses est gradué avec un pas de 1 jour à partir de la graduation 1 qui correspond au 1^{er} mars 2000.

Analyse de l'article

1. Estimez la distance D séparant la Terre de la Lune grâce aux données du début du texte.

I - Traversée de l'atmosphère

L'atmosphère terrestre est supposée en équilibre hydrostatique dans un champ de pesanteur uniforme. Elle est assimilée à un gaz parfait de masse molaire M , sans autre hypothèse particulière. Sa pression P , sa température T , sa masse volumique ρ et son indice optique n varient avec l'altitude z . On suppose que $n(z) - 1$ est proportionnel à $\rho(z)$.

2. Pour un tir vertical, quelle correction δD faut-il apporter à la mesure de la distance D à cause de l'atmosphère ? Vous l'exprimerez sous forme d'une intégrale sur l'épaisseur de l'atmosphère.
3. Exprimez δD en fonction de n_0 , indice optique au sol ($z = 0$), et d'une longueur H fonction de la température au sol T_0 . Quelle est l'interprétation physique de H ?
4. Sachant que $n_0 - 1 = 3 \times 10^{-4}$ et que $T_0 = 290$ K, calculez H et δD . Comparez cette dernière valeur à celle indiquée dans le texte (ligne 176).
5. Comment l'expression de δD obtenue à la question 3 est-elle modifiée pour un tir incliné de l'angle $h > 0$ par rapport à l'horizontale ?

II - Trajet Terre - Lune

6. D'après le texte (lignes 186 – 192) la durée du trajet Terre-Lune est affectée par la présence du Soleil. On suppose que la variation relative de la durée de ce trajet est proportionnelle au potentiel gravitationnel du Soleil et fait aussi intervenir c , la vitesse de la lumière dans le vide. Par un raisonnement dimensionnel, exprimez la correction à apporter à la distance Terre-Lune résultant de cet effet. Dans votre résultat final, faites apparaître la vitesse de révolution v_{\oplus} de la Terre autour du Soleil.
7. Estimez numériquement la valeur de v_{\oplus} . Calculez la correction de distance due à la présence du Soleil et comparez-la à ce qu'indique le texte (ligne 192).

III - L'écho lumineux

Le faisceau lumineux émis depuis la Terre est un cône dont l'angle d'ouverture est noté α . On note S la surface du miroir du télescope et S' la surface du réflecteur placé sur la Lune. On suppose que tous les miroirs sont parfaits. Le laser *vert* utilisé a une longueur d'onde λ .

8. Calculez le nombre N de photons émis par une impulsion laser et vérifiez que votre valeur est cohérente avec celle indiquée dans le texte (ligne 52).
9. L'ouverture du faisceau à la sortie du télescope (ligne 196) est-elle due à la seule diffraction ?
10. En tenant compte de l'agitation atmosphérique (ligne 198), quelle est la fraction d'énergie lumineuse reçue par le réflecteur lunaire à chaque impulsion laser ?
11. Expliquez pourquoi les cataphotes ont la propriété de renvoyer la lumière dans la direction d'où elle est arrivée (lignes 37 – 42).
12. Montrez que tous les rayons lumineux réfléchis sur un même cataphote parcourent exactement le même chemin optique entre l'émission et la réception.
13. Estimez l'angle d'ouverture α' du faisceau réfléchi par un cataphote dû à la diffraction.
14. Estimez le rapport entre l'énergie reçue par le télescope et celle réfléchie par les cataphotes.
15. En déduire la valeur du rapport η entre l'énergie reçue par le télescope et celle qu'il a émise.

- 16.** Combien de photons récupère-t-on après chaque tir ? Quelles raisons peut-on invoquer pour rendre compte de l'écart entre cette valeur et celle du texte (lignes 54 – 55) ?
- 17.** Expliquez pourquoi l'incertitude de mesure est liée à la durée de l'impulsion. En quoi l'accumulation de tirs permet-elle de réduire cette incertitude (lignes 90 – 102) ?

IV - Analyse de la figure 2

Pour simplifier l'analyse, on suppose que l'orbite de la Lune est contenue dans le plan de l'équateur terrestre et que le réflecteur est au centre de la face visible de la Lune. On suppose aussi que la Lune tourne autour de la Terre dans le même sens que la Terre autour d'elle-même. On note ϕ la latitude de l'observatoire où se trouve le télescope.

- 18.** Les observations du 25 mars 2000 ont-elles été menées autour du premier quartier lunaire, de la pleine Lune ou du dernier quartier lunaire ?
- 19.** Quelle est la principale cause de la variation de la durée aller-retour Δt représentée sur la figure 2 ? À quel instant t_0 la Lune est-elle au plus haut dans le ciel de l'observatoire ?
- 20.** Modélisez la variation temporelle de Δt autour de t_0 . Dans un cadre que vous détaillerez, montrez que Δt s'écrit comme un polynôme du second degré en $(t - t_0)$.
- 21.** Estimez la latitude de l'observatoire grâce à la figure 2 et à la table 1. Commentez.

V - Analyse de la figure 3

Dans cette analyse, on considère que l'orbite de la Lune est une ellipse d'équation polaire $r = p/(1 + e \cos \theta)$, où r est la distance Terre-Lune et θ l'angle repérant la direction de la Lune dans le plan de son orbite. Le paramètre p et l'excentricité e sont des constantes.

- 22.** Quel est le cadre d'hypothèses qui permet d'obtenir cette orbite ?
- 23.** Quelle est la cause principale des variations de la durée d'aller-retour représentée figure 3 ?
- 24.** Grâce à la figure 3, estimez la période de révolution T de la Lune ainsi que le demi-grand axe a et l'excentricité e de son orbite.
- 25.** Quelles explications peut-on donner à l'absence d'observations entre les jours 27 et 43 ?

VI - Tests de physique

- 26.** On suppose que la constante de gravitation G varie lentement au cours du temps (lignes 211 – 216) et on en étudie les conséquences sur l'orbite de la Lune. Quelle quantité reste conservée ?
- 27.** On suppose que l'orbite de la Lune est approximativement circulaire. Expliquez pourquoi une diminution de G se traduit par un ralentissement de la vitesse angulaire de la Lune. Quelle est la variation relative de la vitesse angulaire si celle de G est de 1 % ?
- 28.** G est maintenant supposée constante. Montrez qu'à la décélération séculaire (diminution de la vitesse angulaire) de -24 secondes d'arc par siècle au carré (ligne 219) est associé un éloignement de la Lune au rythme de quelques centimètres par an.
- 29.** On s'intéresse maintenant à l'influence de la décélération séculaire de la Lune sur la rotation propre de la Terre. Expliquez pourquoi le moment cinétique total du couple Terre-Lune est conservé. Montrez que l'on peut négliger la contribution due à la rotation de la Lune sur elle-même.
- 30.** Montrez que la décélération séculaire de la Lune modifie la période de rotation de la Terre sur elle-même. S'agit-il d'une augmentation ou d'une diminution ?

* *
*